Jonathan Ortiz

17 de diciembre de 2013

1. Sea $(X, d)$ un espacio métrico. Sean $(x_n)$ una sucesión en $X$ y $x \in X$ tal que $(x_n)$ no converge a $x$, entonces existe una subsucesión de $(x_n)$ tal que ninguna subsucesión de esta última converge a $x$.

   *Demostración.* Vamos a construir tal sucesión. Como $x_n \not\longrightarrow x$ sabemos que existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$ existe $n > N$ tal que $d(x_n, x) \geq \epsilon$. Para $N = 1$ existe $n_1 > 1$ tal que la $d(x_{n_1}, x) \geq \epsilon$. Para $N = n_1$ existe $n_2 > n_1$ tal que la $d(x_{n_2}, x) \geq \epsilon$. Procediendo inductivamente se obtiene que para $N = n_k$ existe $n_{k+1} > n_k$ tal que la $d(x_{n_{k+1}}, x) \geq \epsilon$. Definimos:

   $$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

   tal que $\varphi(k) = n_k$ donde el $n_k$ se encuentra por el proceso anterior y via el axioma de elección. Evidentemente $\varphi$ es creciente. Analizando la definición de $\varphi$, obtenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $d(x_{\varphi(n)}, x) \geq \epsilon$ considerando esto es facil probar que ninguna subsucesión de $(x_{\varphi(n)})$ converge a $x$. $\square$