Espacios normados

Jonathan Ortiz

28 de abril de 2014

Sea E un espacio normado. Demostrar:

1. La clausura de la bola abierta es la bola cerrada.

   Demostración. Sean $a \in E$ y $r > 0$, vamos a probar que: $\overline{B(a,r)} = B[a,r]$. Dado que la clausura de un conjunto es el cerrado más pequeño que contiene al conjunto, es inmediato que: $\overline{B(a,r)} \subset B[a,r]$; falta probar la otra inclusión.
   Sea $x \in B[a,r]$, vamos a probar que $x \in \overline{B(a,r)}$; es suficiente probar que si $|x-a| = r$, entonces $x \in \overline{B(a,r)}$, para esto sea $\epsilon > 0$; y defino $k < \text{mín}\{1, \frac{\epsilon}{r}\}$ positivo; defino $y = a + (1-k)(x-a)$, que pertenece a E, porque es espacio vectorial y además:

   $$|y-a| = (1-k)r < r \ y \ |y-x| = kr < \epsilon.$$

   Esto prueba que $x \in \overline{B(a,r)}$. □

2. El interior de la bola cerrada es la bola abierta.

   Demostración. Sean $a \in E$ y $r > 0$, vamos a probar que: $\overset{\circ}{B[a,r]} = B(a,r)$. Dado que el interior de un conjunto es el abierto más grande que está contenido en el conjunto, es inmediato que: $B(a,r) \subset \overset{\circ}{B[a,r]}$; falta probar la otra inclusión.
   Sea $x \in \overset{\circ}{B[a,r]}$, vamos a probar que $x \in B(a,r)$; por la definición de conjunto interior, existe $\delta > 0$ tal que $B(x,\delta) \subset B(a,r)$, supongamos que $x \notin B(a,r)$, esto implica que:$|x-a| = r$.
   Defino $y = x + \frac{\delta(x-a)}{2r}$, nótese que $y \in E$ y además:

   $$|x-y| = \frac{\delta}{2} < \delta \ y \ |y-a| = |x-a|(1+\frac{\delta}{2r}) = \frac{2r+\delta}{2} > r.$$

   Esto contradice $B(x,\delta) \subset B(a,r)$. □

3. El diámetro de una bola abierta o cerrada es 2 veces su radio.

   Demostración. Sean $a \in E$ y $r > 0$, vamos a probar que: $diam(B(a,r)) = 2r$. Sean $x, y \in B(a,r)$, entonces por la desigualdad triangular se tiene:

   $$|x-y| \leq |x-a| + |a-y| < 2r.$$

   Esto prueba que $diam(B(a,r)) \leq 2r$. Supongamos que $diam(B(a,r)) < 2r$ todo $diam(B(a,r)) < k < 2r$, tomo $z \in E$ no nulo y defino: $x = a + \frac{kz}{2|z|}$ y $y = a - \frac{kz}{2|z|}$ se tiene que:

   $$|x-a| = \frac{k}{2} < r \ y \ |y-a| = \frac{k}{2} < r$$

   Pero además se tiene que:

   $$|x-y| = \left| a + \frac{kz}{2|z|} - a + \frac{kz}{2|z|} \right| = \frac{|kz|}{|z|} = k.$$

   Esto contradice la definición de diámetro. El caso para la bola cerrada es similar. □