PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL ECUADOR

CÁLCULO DIFERENCIAL • PRUEBA NO. 1

20 de abril de 2018 *Mat. Andrés Merino*

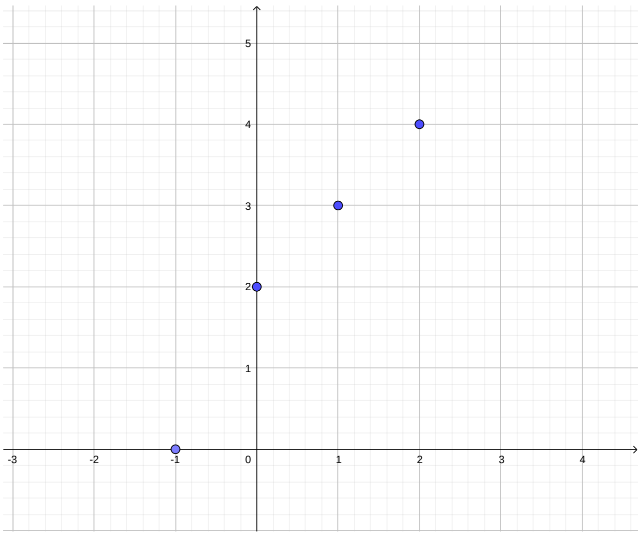
Nombre:...

1. Dados los conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ y $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ determinar cuáles de los siguientes conjuntos es una función de A en B, de no ser función indica el porqué, de ser función, graficarla y escribir su imagen.

   - $f = \{(-1, 0), (0, 2), (1, 3), (2, 4)\}$, (1.0pt)
   - $g = \{(-1, 0), (0, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3)\}$, (0.5pt)
   - $h = \{(-1, 0), (0, 2), (1, 3)\}$. (0.5pt)

Solución.

- Sí es función, su gráfica es la siguiente



  Además, $\operatorname{img}(f) = \{0, 2, 3, 4\}$.

- No es función, pues 1 tiene dos parejas, es decir $(1, 3) \in g$ y $(1, 4) \in g$ pero $3 \neq 4$.
- No es función, pues no todo elemento de A tiene pareja, por ejemplo, para $2 \in A$, no existe un elemento $y \in B$ tal que $(2, y) \in h$.

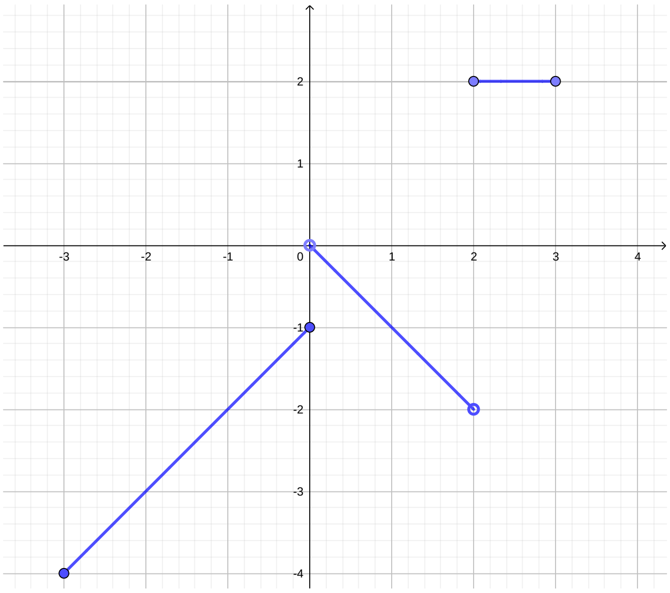
□

2. Dada la función

$$
\begin{aligned}
f\colon [-3,3] &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \leq 0, \\ -x & \text{si } 0 < x < 2, \\ 2 & \text{si } 2 \geq x, \end{cases}
\end{aligned}
$$

graficarla y hallar su imagen. ¿Cuál es el valor de $f(0)$, $f(1)$, $f(4)$? (3.5pt)

Solución. Tenemos que la gráfica de la función es la siguiente



Así, la imagen es $\operatorname{img}(f) = [-4, 0[\cup \{2\}$. Por otra parte, se tiene que

$$f(0) = -1 \qquad \text{y} \qquad f(1) = -1.$$

No existe $f(4)$ pues $4 \notin \operatorname{dom}(f)$. □

3. Dada la función $f\colon I \to \mathbb{R}$, calcular

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

para $h \neq 0$.

   a) $f(x) = 2 - 3x$ (1pt)
   b) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ (1pt)

Solución.

a) Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{2 - 3(x+h) - (2 - 3x)}{h} \\ &= \frac{-3h}{h} \\ &= -3. \end{aligned}$$

b) Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{-\frac{1}{(x+h)^2} - \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{h} \\ &= \frac{\frac{-x^2 + (x+h)^2}{x^2(x+h)^2}}{h} \\ &= \frac{-x^2 + x^2 + 2xh + h^2}{x^2 h (x+h)^2} \\ &= \frac{2xh + h^2}{x^2 h (x+h)^2} \\ &= -\frac{2x + h}{x^2 (x+h)^2}. \end{aligned}$$ □

4. Determinar el dominio natural de la ley de asignación (1pt)

$$f(x) = \frac{\sqrt{3 - 2x}}{1 + \frac{1}{x+1}}.$$

Solución. Tenemos restricciones:

$$3-2x \geq 0 \qquad \text{y} \qquad 1+\frac{1}{x+1} \neq 0 \qquad \text{y} \qquad x+1 \neq 0$$

lo que equivale a

$$x \leq \frac{3}{2} \qquad \text{y} \qquad x \neq -2 \qquad \text{y} \qquad x \neq -1$$

Entonces

$$\operatorname{dom}(f) = \left]-\infty, \frac{3}{2}\right] \smallsetminus \{-1,-2\}. \qquad \square$$

5. Dadas las funciones

$$\begin{aligned} f\colon [2,5] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = 2x-1 \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g\colon [-4,7] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = 1-x^2 \end{aligned},$$

determinar $g \circ f$. (1.5pt)

Solución. Primero calculamos el dominio de $g \circ f$, así, si $x \in \operatorname{dom}(g \circ f)$, tenemos que:

$$x \in \operatorname{dom}(f) \qquad \text{y} \qquad f(x) \in \operatorname{dom}(g).$$

Ahora, si $x \in \operatorname{dom}(f)$, entonces $x \in [2,5]$. Por otra parte, notemos que

$$\begin{aligned} f(x) \in \operatorname{dom}(g) &\iff 2x-1 \in [-4,7] \\ &\iff x \in \left[-\frac{3}{2}, 4\right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$x \in \left[-\frac{3}{2}, 4\right] \cap [2,5] = [2,4].$$

Así, tenemos que

$$\operatorname{dom}(g \circ f) = [2,4].$$

Finalmente, calculemos la ley de asignación para $g \circ f$. Tenemos que

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(2x-1) \\ &= 1-(2x-1)^2 \\ &= 1-(4x^2-4x+1) \\ &= -4x^2+4x. \end{aligned} \qquad \square$$

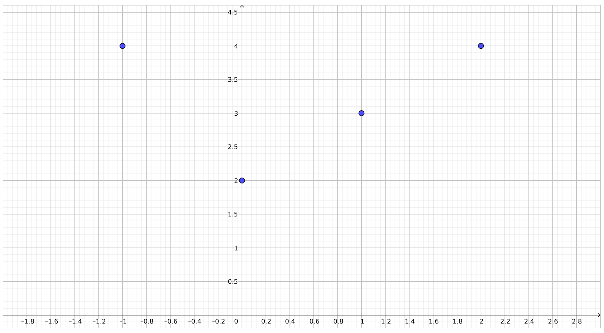
$\aleph_0$

1. Dados los conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ y $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ determinar cuáles de los siguientes conjuntos es una función de A en B, de no ser función indica el porqué, de ser función, graficarla y escribir su imagen. (2.0pt)

   - $f = \{(-1, 4), (0, 2), (1, 3), (2, 4)\}$,
   - $g = \{(-1, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 3), (2, 3)\}$,
   - $h = \{(-1, 4), (0, 3), (1, 2)\}$.

Solución.

- Sí es función, su gráfica es la siguiente



  Además, $\text{img}(f) = \{2, 3, 4\}$.
- No es función, pues 1 tiene dos parejas, es decir $(1, 1) \in g$ y $(1, 3) \in g$, pero $1 \neq 3$
- No es función, pues no todo elemento de A tiene pareja, por ejemplo, para $2 \in A$ no existe un elemento $y \in B$ tal que $(2, y) \in h$. □

2. ¿Qué significa que una función sea inyectiva? ¿qué significa que una función sea sobreyectiva? (excribir la defininción y su explicación). (2.0pt)

3. Dada la función $f : I \to \mathbb{R}$ calcular

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

para $h \neq 0$: (1.0pt)

   a) $f(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$.

   b) $f(x) = 1 - x - x^2$.

Solución. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\dfrac{1}{1-(x+h)^2} - \dfrac{1}{1-x^2}}{h} \\
&= \frac{\dfrac{1 - x^2 - 1 + (x+h)^2}{(1-x^2)(1-(x+h)^2)}}{h} \\
&= \frac{-x^2 + x^2 + 2xh + h^2}{h(1-x^2)(1-(x+h)^2)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2x+h}{(1-x^2)(1-(x+h)^2)} \\
&= \frac{2x+h}{x^4+x^3h+x^2h-2x^2-2xh-h+1}.
\end{aligned}
$$

□

4. Determinar el dominio natural de la ley de asignación (1.5pt)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}-1}.$$

Solución. Tenemos restricciones

$$\sqrt{1-2x}-1 \neq 0 \qquad \text{y} \qquad 1-2x \geq 0,$$

lo que equivale a

$$x \neq 0 \qquad \text{y} \qquad x \geq \frac{1}{2}.$$

Entonces

$$\operatorname{dom}(f) = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

□

5. Dadas las funciones

$$
\begin{aligned}
f\colon [-2,5] &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto f(x) = 1-2x^2
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
g\colon (-\infty,4) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto g(x) = 1-2x,
\end{aligned}
$$

determinar $f \circ g$. (1.5pt)

Solución. Primero calculamos el dominio de $f \circ g$, así, si $x \in \operatorname{dom}(f \circ g)$, tenemos que:

$$x \in \operatorname{dom}(g) \qquad \text{y} \qquad g(x) \in \operatorname{dom}(f).$$

Ahora, si $x \in \operatorname{dom}(g)$ entonces $x \in (-\infty, 4)$. Por otra parte, notemos que

$$
\begin{aligned}
g(x) \in \operatorname{dom}(f) &\iff 1-2x \in [-2,5] \\
&\iff -2 \leq 1-2x \leq 5 \\
&\iff -2 \leq x \leq \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$x \in \left[-2, \frac{3}{2}\right].$$

Así, tenemos que

$$\operatorname{dom}(f \circ g) = (-\infty, 4) \cap \left[-2, \frac{3}{2}\right] = \left[-2, \frac{3}{2}\right].$$

Finalmente, calculemos ley de asignación para $f \circ g$. Tenemos que

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
&= f(1-2x) \\
&= 1-2(1-2x)^2 \\
&= -8x^2+8x-1.
\end{aligned}
$$

□

6. Si suponemos que la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}\setminus\{2\} &\longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{3\} \\ x &\longmapsto f(x)=\frac{6x-1}{2x-4} \end{aligned}$$

es invertible, hallar su inversa. (1.0pt)

Solución. Si tomamos $y=f(x)=\dfrac{6x-1}{2x-4}$, se tiene que

$$y=\frac{6x-1}{2x-4} \Longleftrightarrow\Longleftrightarrow x=\frac{1-4y}{6-2y}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon \mathbb{R}\setminus\{3\} &\longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{2\} \\ x &\longmapsto f^{-1}(x)=\frac{1-4y}{6-2y}. \end{aligned}$$

□

7. Se desea construir una caja de base cuadrada que tenga capacidad de 1000cm^3. Modelar el material utilizado al construir la caja en función del lado de su base. Si la base es 10cm, ¿cuánto materia se utiliza? ¿Qué dimensión debe tener la caja para utilizar 100cm^2? (2.0pt)

Solución. Tomemos

- x: lado de la base en cm;
- h: altura de la caja en cm;
- $M(x)$: material utilizado en la caja cuando la base es x en cm^2.

Con el dominio $x\in(0,+\infty)$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} \text{área de la base} \times \text{altura} &= \text{volumen} \\ x^2h &= 1000 \\ h &= \frac{1000}{x^2}. \end{aligned}$$

además,

$$\begin{aligned} \text{área total} &= 2\text{área de la base} + 4\text{área de cara lateral} \\ M(x)=2x^2+4xh &= 2x^2+4x\left(\frac{1000}{x^2}\right)=2x^2+\frac{4000}{x} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función que modela el problema es

$$\begin{aligned} M\colon (0,+\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x^2+\frac{4000}{x}. \end{aligned}$$

Para la primera pregunta, pide calcular $M(x)$ cuando $x=10$, así

$$M(10)=2(10)^2+\frac{4000}{10}=600$$

Por lo tanto, tenemos que si el lado de la base es de 10cm, el material a utilizase para la construcción de la caja es de 600cm^2.

Para la segunda pregunta, me pide encontrar $x\in(0,+\infty)$ tal que $M(x)=100$, así

$$M(x)=100 \Longleftrightarrow 2x^2+\frac{4000}{x}=100 \Longleftrightarrow 2x^3-100x+4000=0.$$

Las soluciones a esta ecuación son imaginarias o negativas, por lo tanto, no existe una medida para la base de tal manera que la caja utilice 100cm^2. □

28 de mayo de 2018 *Mat. Andrés Merino*

1. Dada la función

$$\begin{aligned} f\colon I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = 3x^2 - 2x + 1, \end{aligned}$$

calcular

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Solución. Se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{3(x+h)^2 - 2(x+h) + 1 - (3x^2-2x+1)}{h} \\ &= \frac{3x^2+6xh+3h^2-2x-2h+1-3x^2+2x-1}{h} \qquad = \frac{6xh+3h^2-2h}{h} \\ &= 6x+3h-2. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} 6x+3h-2 \\ &= 6x+3(0)-2 \\ &= 6x-2. \end{aligned}$$

□

2. ¿Para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x < 1, \\ \alpha x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

es continua en 1?

Solución. Para que f sea continua en 1, necesitamos que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = \alpha - 1.$$

Tenemos que

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \alpha(1) - 1 = \alpha - 1$$

y

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1^2 + 1 = 2,$$

por lo tanto, para que el límite exista, necesitamos que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} f(x) \\ \alpha - 1 &= 2 \\ \alpha &= 3 \end{aligned}$$

Así, tenemos que si $\alpha = 3$, entonces

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2 = 3(1) - 1 = f(1),$$

con lo cual f es continua en 1. □

3. Calcular $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{4-x}$.

Solución. Analizando el denominador, tenemos que

$$\lim_{x\to 4} 4 - x = 4 - 4 = 0,$$

mientras que en el numerador

$$\lim_{x\to 4} 2 - \sqrt{x} = 2 - \sqrt{4} = 2 - 2 = 0,$$

con lo cual obtenemos una indeterminación y por lo tanto realizaremos una manipulación algebraica.

Tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{2-\sqrt{x}}{4-x} &= \frac{2-\sqrt{x}}{4-x}\cdot\frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\\
&= \frac{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}{(4-x)(2+\sqrt{x})}\\
&= \frac{4-x}{(4-x)(2+\sqrt{x})}\\
&= \frac{1}{2+\sqrt{x}},
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{4-x} &= \lim_{x\to 4}\frac{1}{2+\sqrt{x}}\\
&= \frac{\lim_{x\to 4} 1}{\lim_{x\to 4}(2+\sqrt{x})}\\
&= \frac{1}{2+\sqrt{4}}\\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

□

4. Calcular $\lim_{x\to -2^+}\frac{1-x}{x^2-4}$.

Solución. Analizando el denominador, tenemos que

$$\lim_{x\to -2^+} x^2 - 4 = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0,$$

mientras que en el numerador

$$\lim_{x\to -2^+} 1 - x = 1 - (-2) = 3,$$

por lo tanto el límite no existe, pero es un infinto. Notemos que, ya que $x \to -2^+$,

$$1 - x > 0 \qquad \text{y} \qquad x^2 - 4 < 0,$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{1-x}{x^2-4} = -\infty.$$

□

5. Calcular $\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{9x^2+1}}{2x-\sqrt{x}}$.

Solución. Analizando el denominador, tenemos que

$$\lim_{x\to +\infty} 2x - \sqrt{x} = +\infty,$$

mientras que en el numerador

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{9x^2+1} = +\infty,$$

con lo cual obtenemos una indeterminación y por lo tanto realizaremos una manipulación algebraica.

Tenemos que

$$\frac{\sqrt{9x^2+1}}{2x-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}{2-\frac{\sqrt{x}}{x}} = \frac{\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}{2-\frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1}}{2x-\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}{2-\frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

Analizando nuevamente el denominador, se tiene que

$$\lim_{x\to+\infty} 2-\frac{1}{\sqrt{x}} = 2,$$

y en el numerador

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{9+\frac{1}{x^2}} = 3,$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1}}{2x-\sqrt{x}} = \frac{3}{2}.$$

□

6. Calcular $\lim_{x\to-1} \frac{\operatorname{sen}(1-x^2)}{1+x}$.

Solución. Tenemos que

$$\frac{\operatorname{sen}(1-x^2)}{1+x} = (1-x)\frac{\operatorname{sen}(1-x^2)}{(1-x)(1+x)} = (1-x)\frac{\operatorname{sen}(1-x^2)}{1-x^2}.$$

Ahora, gracias a que

$$\lim_{x\to-1} 1-x^2 = 0,$$

tomamos el cambio de variable $y = 1-x^2$ y se tiene que

$$\lim_{x\to-1} \frac{\operatorname{sen}(1-x^2)}{1-x^2} = \lim_{y\to0} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} = 1.$$

Así, tenemos que

$$\lim_{x\to-1} \frac{\operatorname{sen}(1-x^2)}{1+x} = \lim_{x\to-1} (1-x)\frac{\operatorname{sen}(1-x^2)}{1-x^2} = 2.$$

□

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL ECUADOR
CÁLCULO DIFERENCIAL • EXAMEN NO. 2

11 de junio de 2018 *Mat. Andrés Merino*

1. Dada la función (2pt)

$$\begin{aligned} f\colon I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{1}{2x+1}, \end{aligned}$$

calcular

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Solución. Se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\frac{1}{2(x+h)+1} - \frac{1}{2x+1}}{h} \\ &= \frac{\frac{2x+1-2x-2h-1}{(2x+1)(2x+2h+1)}}{h} \\ &= -\frac{2h}{h(2x+1)(2x+2h+1)} \\ &= -\frac{2}{(2x+1)(2x+2h+1)}. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} -\frac{2}{(2x+1)(2x+2h+1)} \\ &= -\frac{2}{(2x+1)^2}. \end{aligned}$$

□

2. Dada la función (2pt)

$$\begin{aligned} g\colon I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = \frac{1}{2x^2}, \end{aligned}$$

calcular

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Solución. Se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\frac{1}{2(x+h)^2} - \frac{1}{2x^2}}{h} \\ &= \frac{\frac{2x^2-2(x^2+2xh+h^2)}{4x^2(x^2+2xh+h^2)}}{h} \\ &= \frac{-4xh+h^2}{4hx^2(x^2+2xh+h^2)} \\ &= \frac{-4x+h}{4x^2(x^2+2xh+h^2)}. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{-4x+h}{4x^2(x^2+2xh+h^2)}\\ &= -\frac{4x}{4x^4}\\ &= -\frac{1}{x^3}.\end{aligned}$$

□

3. Calcular (2pt)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}$$

Solución. Analizando el denominador, tenemos que

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{x}-\sqrt{2-x}=0,$$

mientras que en el numerador

$$\lim_{x\to 1}x-1=0,$$

con lo cual obtenemos una indeterminación y por lo tanto realizaremos una manipulación algebraica.

Tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}} &= \frac{x-1}{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}}\\ &= \frac{(x-1)(\sqrt{x}+\sqrt{2-x})}{x-(2-x)}\\ &= \frac{(x-1)(\sqrt{x}+\sqrt{2-x})}{2x-2}\\ &= \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}}{2},\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}} &= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{1}+\sqrt{1}}{2}\\ &= 1.\end{aligned}$$

□

4. Calcular (2pt)

$$\lim_{x\to -2}\frac{2\operatorname{sen}(x^2-4)}{x+2}$$

Solución. Analizando el denominador, tenemos que

$$\lim_{x\to -2}x+2=0,$$

mientras que en el numerador

$$\lim_{x\to -2}2\operatorname{sen}(x^2-4)=0,$$

con lo cual obtenemos una indeterminación y por lo tanto realizaremos una manipulación algebraica.

Tenemos que

$$\frac{2\,\mathrm{sen}(x^2-4)}{x+2} = \frac{2\,\mathrm{sen}(x^2-4)}{x+2}\cdot\frac{x-2}{x-2}$$
$$= 2(x-2)\frac{\mathrm{sen}(x^2-4)}{x^2-4}.$$

Ahora, gracias a que

$$\lim_{x\to -2} x^2-4=0,$$

tomamos el cambio de variable $y=x^2-4$ y se tiene que

$$\lim_{x\to -2}\frac{2\,\mathrm{sen}(x^2-4)}{x+2} = \lim_{x\to -2} 2(x-2)\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{sen}(y)}{y} = -8.$$

□

5. Calcular (2pt)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x-1)^3}$$

Solución. Analizando el denominador, tenemos que

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^3=0,$$

mientras que en el numerador

$$\lim_{x\to 1} x^2-1=0,$$

con lo cual obtenemos una indeterminación y por lo tanto realizaremos una manipulación algebraica.

Tenemos que

$$\frac{x^2-1}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^3}$$
$$= \frac{(x+1)}{(x-1)^2},$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x-1)^3} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)}{(x-1)^2}$$

Analizando nuevamente el denominador, se tiene que

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^2=0,$$

y en el numerador

$$\lim_{x\to 1} x+1=2,$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x-1)^3}=+\infty.$$

□

6. Calcular (2pt)

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1-x}{4-x^2}$$

Solución. Analizando el denominador, tenemos que

$$\lim_{x\to 2^-} 4-x^2=0,$$

mientras que en el numerador

$$\lim_{x\to 2^-} 1-x = 1-2 = -1,$$

por lo tanto el límite no existe, pero es un infinto. Así, gracias a que $4-x^2>0$,

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1-x}{4-x^2} = -\infty.$$

□

7. Calcular (2pt)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x}}$$

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x(1+\frac{\sqrt{x}}{x})} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(1+\frac{1}{\sqrt{x}})} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} \\
&= \frac{1}{1} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

8. Calcular (2pt)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x+1}{x^2+1}$$

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x+1}{x^2+1} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3})}{x^3(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3})} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}} \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

□

9. Encontrar todas las asíntotas de la función (2pt)

$$\begin{aligned}
f\colon \mathbb{R}\setminus\{1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto f(x) = \begin{cases} x^2-x+1 & \text{si } x\geq 0 \\ \frac{x-1}{x^3-x} & \text{si } x<0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Solución. Tenemos que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x^3-x}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3})}{x^3(1-\frac{1}{x^2})}\\
&= \frac{0}{1}\\
&= 0,
\end{aligned}
$$

por lo tanto tenemos una asíntota horizontal en $y=0$.

Por otra parte, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{x-1}{x^3-x}\\
&= +\infty,
\end{aligned}
$$

por lo tanto, tenemos una asíntota vertical en $x=0$. □

10. ¿Para qué valores de $\alpha\in\mathbb{R}$ se tiene que la función

$$
\begin{aligned}
f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\
x &\longmapsto f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x<-1,\\ \alpha x-1 & \text{si } x\geq -1\end{cases}
\end{aligned}
$$

es continua en 1? (2pt)

Solución. Tenemos que $f(1)=\alpha-1$, y además

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \alpha x - 1 = \alpha - 1,$$

por lo tanto, para cualquier $\alpha\in\mathbb{R}$ se tiene que

$$f(1)=\lim_{x\to 1} f(x),$$

es decir, f es continua en 1 para todo $\alpha\in\mathbb{R}$. □

11. Dibujar una función $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que cumpla: (2pt)

- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty.$
- $\lim_{x\to-1^+} f(x)=-1$
- $\lim_{x\to-1^-} f(x)=-\infty$
- $\lim_{x\to 0} f(x)=0$
- $f(0)=2$
- $\lim_{x\to 2^+} f(x)=-1$
- $\lim_{x\to 2^-} f(x)=-3$

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL ECUADOR

CÁLCULO DIFERENCIAL • PRUEBA NO. 3

9 de julio de 2018 *Mat. Andrés Merino*

1. Utilizando la definición, calcular la derivada de la función definida por

$$f(x) = \frac{1}{3x-1}$$

2. Derivar las funciones definidas por

   a) $g(x) = \ln(1 - x\,\mathrm{sen}(x)) + 1$

   b) $f(x) = 4^{x^2+1}$

3. Determinar para qué valores de α y β se tiene que la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2\alpha(x+1) + \mathrm{sen}(3\beta x) & \text{si } x \geq 0 \\ e^{2\alpha x} + 3\beta(x^2+1) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   es derivable en 0.

4. Si y es función de x, dada de manera implícita por

$$\mathrm{sen}(xy) = y^2,$$

   determinar y'.

5. Escribir la aproximación cuadrática la función definida por

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x + 4$$

   en $a = 1$.

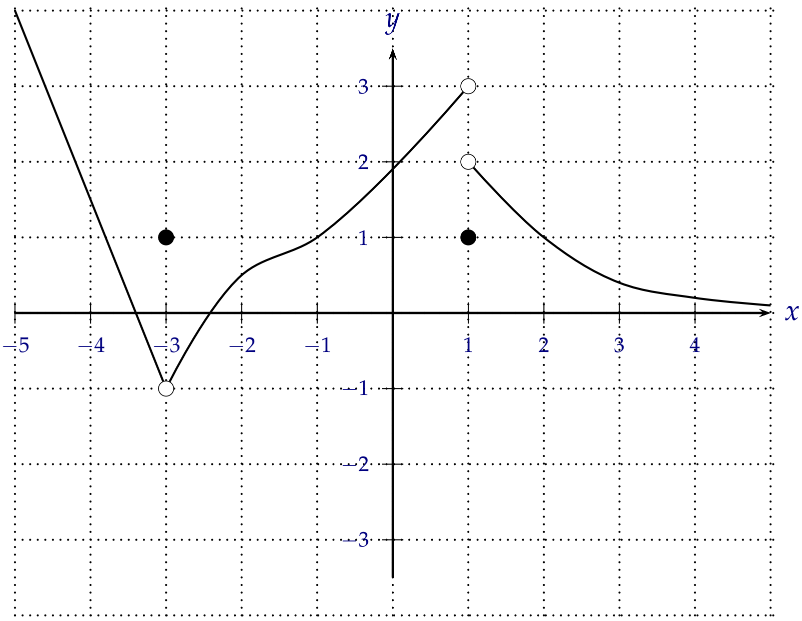
6. Con el ejercicio anterior, determinar el valor de $f(1{,}1)$.

7. Graficar la función definida por

$$f(x) = \frac{6x}{1-3x}$$

$\aleph_0$

1. Dada gráfica de la función f, indique si los límites existen, son infinitos o no existen. (3pt)



a) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

b) $\lim_{x\to-3^+} f(x)$

c) $\lim_{x\to-3^-} f(x)$

d) $\lim_{x\to-3} f(x)$

e) $\lim_{x\to1^+} f(x)$

f) $\lim_{x\to1^-} f(x)$

g) $\lim_{x\to1} f(x)$

h) $\lim_{x\to2} f(x)$

i) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

Solución.

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x\to-3^+} f(x) = -1$

c) $\lim_{x\to-3^-} f(x) = -1$

d) $\lim_{x\to-3} f(x) = -1$

e) $\lim_{x\to1^+} f(x) = 2$

f) $\lim_{x\to1^-} f(x) = 3$

g) No existe

h) $\lim_{x\to2} f(x) = 1$

i) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

□

2. Dada la función (3pt)

$$\begin{aligned} f\colon I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{1}{1-2x}, \end{aligned}$$

calcular, utilizando la definición, $f'(x)$.

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to0} \frac{\frac{1}{1-2(x+h)} - \frac{1}{1-2x}}{h} \\ &= \frac{2}{(1-2x)^2}. \end{aligned}$$

□

3. Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2+1}}{2x-\sqrt{x}}$ (1pt)

Solución. Tenemos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1}}{2x-\sqrt{x}} = \frac{3}{2}$$

□

4. Calcular $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{\operatorname{sen}(1-x^2)}{1+x}$ (1.5pt)

Solución. Tenemos que

$$\lim_{x\to-1} \frac{\operatorname{sen}(1-x^2)}{1+x} = 2.$$

□

5. Encontrar la primera y la segunda derivada de la función definida por $f(x) = \operatorname{sen}(e^{2x})$. (2pt)

Solución.

$$f'(x) = \cos(e^{2x}) \cdot e^{2x} \cdot 2$$
$$f''(x) = -2\operatorname{sen}(e^{2x})e^{2x}e^{2x} \cdot 2 + 4\cos(e^{2x})e^{2x}$$

□

6. Calcular la aproximación cuadrática de la función definida por $f(x) = e^x$ en el punto $a = 0$. (2pt)

Solución. Tenemos que

$$f'(x) = e^x \qquad \text{y} \qquad f''(x) = e^x.$$

La aproximación es

$$\begin{aligned} F(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2}f''(0)(x-0)^2 \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

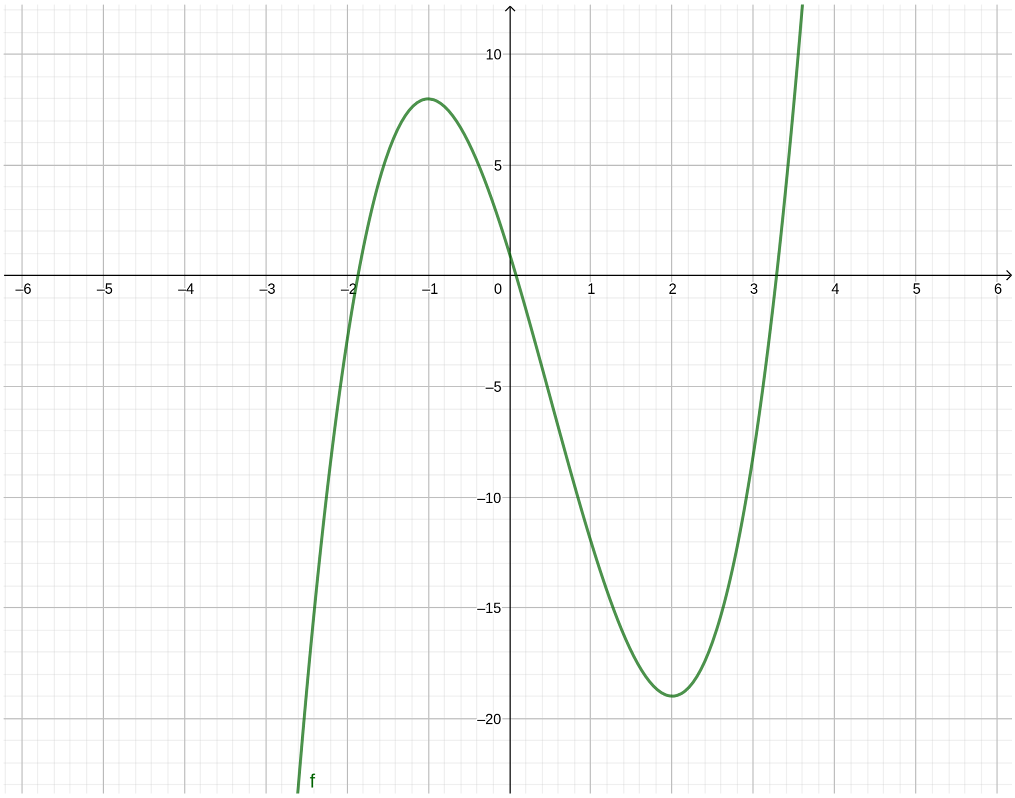
□

7. Dada la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 \end{aligned}$$

- Estudiar sus intervalos de monotonía y concavidad. (3pt)
- Encontrar sus extremos. (1pt)
- Graficarla (no hace falta calcular sus asíntotas). (1pt)

Solución.
- Creciente en $(-\infty, -1)$ y $(2, +\infty)$, decreciente en $(-1, 2)$, convexa en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ y cóncava en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.
- La función alcanza un valor máximo en -1 con $f(-1) = 8$ y un valor mínimo en 2 con $f(2) = -18$.
- La gráfica de la función es la siguiente:



□

8. Un cubo de 100cm de lado se empieza a deformar: su ancho empieza a decrecer a 2 cm/min, su altura empieza a crecer a 1 cm/min y su largo empieza a crecer a 2 cm/min. ¿Su volumen, crece o decrece? ¿Su superficie, crece o decrece? (3pt)

Solución. Definamos

$$\begin{aligned} x(t) &: \text{ancho de la figura en el tiempo } t \\ y(t) &: \text{alto de la figura en el tiempo } t \\ z(t) &: \text{largo de la figura en el tiempo } t \\ V(t) &: \text{volumen de la figura en} cm^3 \text{ en el tiempo} t \\ A(t) &: \text{área de la figura en} cm^2 \text{ en el tiempo} t. \end{aligned}$$

Datos:

$$x(0) = y(0) = z(0) = 10$$
$$\frac{dx}{dt}(0) = -2 \quad \frac{dy}{dt}(0) = 1 \quad \frac{dz}{dt}(0) = 2.$$

Para el volumen

$$V(t) = x(t)y(t)z(t).$$

Derivando

$$\frac{dV}{dt}(t) = \frac{dx}{dt}(t)y(t)z(t) + x(t)\frac{dy}{dt}(t)z(t) + x(t)y(t)\frac{dz}{dt}(t).$$

En $t = 0$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}(0) &= -2(10)(10) + 10(1)(10) + (10)(10)(2) \\ &= -200 + 100 + 200 \\ &= 100, \end{aligned}$$

por lo tanto el volumen crece.

Para el área

$$A(t) = 2x(t)y(t) + 2x(t)z(t) + 2y(t)z(t).$$

Derivando

$$A'(t) = 2x'(t)y(t) + 2x(t)y'(t) + 2x'(t)z(t) + 2x(t)z'(t) + 2y'(t)z(t) + 2y(t)z'(t).$$

Evaluando

$$\begin{aligned} A'(0) &= 2(-2)(10) + 2(10)(1) + 2(-2)(10) + 2(10)(2) + 2(1)(10) + 2(10)(2) \\ &= 40, \end{aligned}$$

por lo tanto el área crece.

□

9. Se desea construir un arco de fútbol que se empotrará en el suelo. Si se dispone de 10 m de varilla para hacerlo, calcular sus dimensiones para que el área del arco sea máxima. (3pt)

$\aleph_0$

Solución. Definamos x como la altura del arco, y como el ancho y $A(x)$ como el área del arco. Tenemos que

$$\begin{aligned} 2x + y &= 10 \\ y &= 10 - 2x. \end{aligned}$$

Para el área

$$\begin{aligned} A\colon [0,5] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto A(x) = x(10-2x) = 10x - 2x^2 \end{aligned}.$$

Derivando

$$A'(x) = 10 - 4x.$$

Igualando a 0, $x = \frac{5}{2}$. Volviendo a derivar $A''(x) = -4$. Evaluando $A''(\frac{5}{2}) = -4$, se tiene un máximo. Las dimensiones son $\frac{5}{2}m$ de alto y $\frac{15}{2}m$ de ancho.

□