Fascículos de Matemática
del Proyecto CLAVEMAT

5 (1)

Teoría de la Medida
Resumen y Ejercicios Resueltos

1. Funciones Medibles

Proyecto CLAVEMAT

Fascículos de Matemática
del Proyecto CLAVEMAT

Proyecto CLAVEMAT

Teoría de la Medida

Resumen y Ejercicios Resueltos

1. Funciones Medibles

Fascículo de Matemática No. 5 (1)

TEORÍA DE LA MEDIDA: RESUMEN Y EJERCICIOS RESUELTOS
1. FUNCIONES MEDIBLES

PROYECTO CLAVEMAT

Escrito por: Leonardo Montoya, Pablo Rosero
Responsable de la Edición: Andrés Merino
Revisión Académica: el texto aún no cuenta con revisión académica de pares

Registro de derecho autoral No.
ISBN: 978-0000-000-00

Publicado por el proyecto CLAVEMAT de la Escuela Politécnica Nacional, Ladrón de Guevara E11-253, Quito, Ecuador.

Primera edición: 2016
Primera impresión: 2016

Índice general

FASCÍCULO 1

FUNCIONES MEDIBLES

1.1. Resumen

1.1.1. Preliminares

DEFINICIÓN 1.1 (Imagen directa e inversa)**.** Sean E y F conjuntos, $f\colon E \to F$ una función, $A \subseteq E$ y $B \subseteq F$. Se define la *imagen directa* de A bajo f por el conjunto

$$f(A) = \{f(x) \in F : x \in A\}.$$

Y la *imagen inversa* de B bajo f por el conjunto

$$f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}.$$

PROPOSICIÓN 1.1. Sean E y F conjuntos y $f\colon E \to F$ una función. Se tiene que

$$f^{-1}(F) = E, \qquad f^{-1}(\varnothing) = \varnothing, \qquad \text{y} \qquad f(\varnothing) = \varnothing.$$

Además, si $B \subseteq F$, entonces $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$.

PROPOSICIÓN 1.2. Sean E y F conjuntos, $f\colon E \to F$ una función, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de subconjuntos de E y de F, respectivamente. Se tiene que

i) $f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n)$;

ii) $f^{-1}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n)$;

iii) $f\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(A_n)$; y

iv) $f\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(A_n)$.

DEFINICIÓN 1.2. Sean E y F conjuntos, $f\colon E \to F$ una función, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(E)$ y $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(F)$. Se definen las siguientes familias de conjuntos

$$f(\mathcal{C}) = \{B \subseteq B : f^{-1}(B) \in \mathcal{C}\} \qquad \text{y} \qquad f^{-1}(\mathcal{D}) = \{f^{-1}(B) \subseteq E : B \in \mathcal{D}\}.$$

DEFINICIÓN 1.3 (Límite superior)**.** Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de un conjunto E, al conjunto

$$\limsup A_n = \bigcap_{m=0}^{+\infty} \left(\bigcup_{n=m}^{+\infty} A_n \right)$$

se lo llama el *límite superior* de la sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

DEFINICIÓN 1.4 (Límite inferior)**.** Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de un conjunto E, al conjunto

$$\liminf A_n = \bigcup_{m=0}^{+\infty} \left(\bigcap_{n=m}^{+\infty} A_n \right)$$

se lo llama el *límite inferior* de la sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

DEFINICIÓN 1.5 (Reales extendidos)**.** Se define el conjunto de los *números reales extendidos* por

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}.$$

Además, se extienden las operaciones de $\mathbb{R}$ de la siguiente manera, para $x \in \mathbb{R}$,

$$\pm\infty + (\pm\infty) = x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty,$$
$$(\pm\infty)(\pm\infty) = +\infty, \qquad (\mp\infty)(\pm\infty) = -\infty,$$
$$x(\pm\infty) = (\pm\infty)x = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ \mp\infty & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1.1.2. Espacios medibles

DEFINICIÓN 1.6 (σ-álgebra)**.** Sean E un conjunto no vacío y $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(E)$ una familia de conjuntos. Se dice que $\mathcal{G}$ es una *σ-álgebra* sobre E si cumple que

i) $E \in \mathcal{G}$ y $\varnothing \in \mathcal{G}$;

ii) si $A \in \mathcal{G}$, entonces el complemento de A, $A^c = E \setminus A \in \mathcal{G}$; y

iii) si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{G}$, entonces $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{G}$.

DEFINICIÓN 1.7 (Espacio medible)**.** Sea E un conjunto no vacío, si $\mathcal{G}$ es una σ-álgebra sobre E, al par $(E, \mathcal{G})$ se lo llama un *espacio medible*. Además, a los elementos de $\mathcal{G}$ se los llama *conjuntos $\mathcal{G}$-medibles*; cuando no exista ambigüedad en la σ-álgebra utilizada, a los elementos se los llama simplemente *conjuntos medibles*.

PROPOSICIÓN 1.3. Sea $(E, \mathcal{G})$ un espacio medible. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{G}$, entonces $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{G}$.

DEFINICIÓN 1.8. Sea E un conjunto no vacío, entonces

- $\mathcal{G} = \mathcal{P}(E)$ es llamada la σ-álgebra *discreta*; y
- $\mathcal{G} = \{E, \varnothing\}$ es llamada la σ-álgebra *trivial*.

PROPOSICIÓN 1.4. Sea E un conjunto y sean $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ dos σ-álgebras sobre E. Entonces $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$ es una σ-álgebra sobre E.

PROPOSICIÓN 1.5. Sea E un conjunto, si $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de σ-álgebras sobre E. Entonces $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathcal{G}_n$ es una σ-álgebra sobre E.

DEFINICIÓN 1.9 (σ-álgebra generada)**.** Sean E un conjunto y $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(E)$, con $\mathcal{C} \neq \varnothing$. La σ-álgebra más pequeña que contiene a $\mathcal{C}$, es decir, la intersección de todas los σ-álgebras que contengan a $\mathcal{C}$, es llamada la *σ-álgebra generada* por $\mathcal{C}$ y se la nota por $\sigma(\mathcal{C})$.

DEFINICIÓN 1.10 (Álgebra de Borel)**.** Sean (E, τ) un espacio topológico. Se llama *álgebra de Borel* a $\sigma(\tau)$, notada por $\mathcal{B}(E, \tau)$ o simplemente por $\mathcal{B}(E)$ cuando no existe ambigüedad. A los elemento de $\mathcal{B}(E)$ se los llama *borelianos*.

OBSERVACIÓN. Cuando se trabaje con el conjunto $\mathbb{R}$, se utilizará su topología usual dada por el valor absoluto.

PROPOSICIÓN 1.6. En el conjunto $\mathbb{R}$, se tiene que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es generada por los intervalos abiertos acotados, es decir

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\Big(\big\{\,]a, b[\subseteq \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{R} \text{ y } a < b\big\}\Big).$$

DEFINICIÓN 1.11. En el conjunto $\overline{\mathbb{R}}$, se define el *álgebra de Borel extendida* por

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cup \big\{A \cup \{+\infty\}, A \cup \{-\infty\}, A \cup \{+\infty, -\infty\} : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\big\}.$$

DEFINICIÓN 1.12. Sean $(F, \mathcal{H})$ un espacio medible, E un conjunto y $f\colon E \to F$ una función. El conjunto

$$\sigma(f) = f^{-1}(\mathcal{H}) = \{f^{-1}(B) \subseteq F : B \in \mathcal{H}\},$$

es una σ-álgebra sobre E llamada la *σ-álgebra generada por f*.

PROPOSICIÓN 1.7. Sean E y F conjuntos, $f\colon E \to F$ una función y $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(F)$. Se tiene que

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})).$$

1.1.3. Funciones medibles

DEFINICIÓN 1.13 (Función medible)**.** Sean $(E, \mathcal{G})$ y $(F, \mathcal{H})$ dos espacios medibles y $f\colon E \to F$ una función. Se dice que f es $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$*-medible* (o simplemente *medible* cuando no exista ambiguedad) si para todo $A \in \mathcal{H}$ se tiene que $f^{-1}(A) \in \mathcal{G}$.

En el caso de que $(F, \mathcal{H}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ o $(F, \mathcal{H}) = (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$, se dirá simplemente que f es $\mathcal{H}$*-medible*.

PROPOSICIÓN 1.8. Toda función constante entre dos espacios medibles es medible.

PROPOSICIÓN 1.9. Sean $(E, \mathcal{G})$ y $(F, \mathcal{H})$ dos espacios medibles y $f\colon E \to F$ una función. Se tiene que f es $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$-medible si y solo si

$$\sigma(f) = f^{-1}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{G}.$$

TEOREMA 1.10. Sean $(E, \mathcal{G})$ y $(F, \mathcal{H})$ dos espacios medibles y $f\colon E \to F$ una función y $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(F)$ tal que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{H}$. Se tiene que $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$-medible si y solo si para todo $A \in \mathcal{C}$ se tiene que $f^{-1}(A) \in \mathcal{G}$.

PROPOSICIÓN 1.11. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Se tiene que

i) si f es una función continua, entonces es $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-medible; y

ii) si f es una función monótona, entonces es $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-medible.

PROPOSICIÓN 1.12. Sean $(E, \mathcal{G})$ un espacio medible y $f\colon E \to \mathbb{R}$ una función. Entonces f es $\mathcal{G}$-medible si y solo si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\{x \in E : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{G}.$$

PROPOSICIÓN 1.13. Sean $(E, \mathcal{G})$ un espacio medible y $f\colon E \to \mathbb{R}$ una función. Se tiene que las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $A_\alpha = \{x \in E : f(x) > \alpha\}$ pertenece a $\mathcal{G}$.

b) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $B_\alpha = \{x \in E : f(x) \leq \alpha\}$ pertenece a $\mathcal{G}$.

c) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $C_\alpha = \{x \in E : f(x) \geq \alpha\}$ pertenece a $\mathcal{G}$.

d) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $D_\alpha = \{x \in E : f(x) < \alpha\}$ pertenece a $\mathcal{G}$.

OBSERVACIÓN. Sea E un conjunto, $f\colon E \to \mathbb{R}$ una función y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se tienen las siguientes notaciones

$$\{f < \alpha\} = \{x \in E : f(x) < \alpha\}, \qquad \{f > \alpha\} = \{x \in E : f(x) > \alpha\},$$
$$\{f \leq \alpha\} = \{x \in E : f(x) \leq \alpha\}, \qquad \{f \geq \alpha\} = \{x \in E : f(x) \geq \alpha\}.$$

PROPOSICIÓN 1.14. Sean $(E, \mathcal{G})$ un espacio medible, $f, g\colon E \to \mathbb{R}$ funciones $\mathcal{G}$-medibles y $c \in \mathbb{R}$. Entonces las funciones

$$cf, \qquad f^2, \qquad f+g, \qquad fg \qquad \text{y} \qquad |f|$$

son también $\mathcal{G}$-medibles.

DEFINICIÓN 1.14. Sean E un conjunto y $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ una función. Definimos la *parte positiva* y la *parte negativa* de f, notadas por f^+ y f^-, respectivamente, como

$$f^+(x) = \sup\{f(x), 0\} \qquad y \qquad f^-(x) = \sup\{-f(x), 0\}.$$

PROPOSICIÓN 1.15. Sean $(E, \mathcal{G})$ un espacio medible y $f\colon E \to \mathbb{R}$ un función. Se tiene que

- f^+ y f^- son no negativas;
- $f = f^+ - f^- \quad y \quad |f| = f^+ + f^-$;
- $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f) \quad y \quad f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$; y
- f es $\mathcal{G}$-medible si y solo si f^+ y f^- son $\mathcal{G}$-medibles.

PROPOSICIÓN 1.16. Sean $(E, \mathcal{G})$ un espacio medible y $f_1, f_2\colon E \to \mathbb{R}$ funciones $\mathcal{G}$-medibles, entonces las funciones

$$g_1(x) = \sup\{f_1(x), f_2(x)\} \quad \text{y} \quad g_2(x) = \text{ínf}\{f_1(x), f_2(x)\}$$

son $\mathcal{G}$-medibles.

1.1.4. Funciones con valores extendidos

DEFINICIÓN 1.15. Sea $(E, \mathcal{G})$ un espacio medible, se define

$$\mathcal{M}(E, \mathcal{G}) = \{f\colon E \to \overline{\mathbb{R}} : f \text{ es } \mathcal{G}\text{-medible}\}.$$

PROPOSICIÓN 1.17. Sean $(E, \mathcal{G})$ un espacio medible y $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ una función. Entonces $f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{G})$ si y solo si para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ se cumple que

$$\{x \in E : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{G}.$$

PROPOSICIÓN 1.18. Sean $(E, \mathcal{G})$ un espacio medible y $f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{G})$, entonces los conjuntos

$$\{x \in E : f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in E : f(x) > n\}$$

y

$$\{x \in E : f(x) = -\infty\} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in E : f(x) > n\}\right)^c$$

pertenecen a $\mathcal{G}$.

PROPOSICIÓN 1.19. Sean $(E, \mathcal{G})$ un espacio medible y $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una función. Se tiene entonces que f es $(\mathcal{G}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-medible si y solo si los conjuntos A y B, definidos por:

$$A = \{x \in E : f(x) = +\infty\} \quad \text{y} \quad B = \{x \in E : f(x) = -\infty\},$$

pertenecen a $\mathcal{G}$ y la función de valores reales f_1, definida como sigue:

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \notin A \cup B, \\ 0, & \text{si } x \in A \cup B, \end{cases}$$

es $(\mathcal{G}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-medible.

DEFINICIÓN 1.16. Sean $(E, \mathcal{G})$ un espacio medible y $f, g \in \mathcal{M}(E, \mathcal{G})$. Se define el conjunto

$$F = \{x \in E : f(x) = \pm\infty \quad \text{y} \quad g(x) = \mp\infty\}$$

y la función

$$\begin{aligned} f + g \colon E &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x &\longmapsto (f+g)(x) = \begin{cases} f(x) + g(x) & \text{si } x \notin F, \\ 0 & \text{si } x \in F. \end{cases} \end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 1.20. Sean $(E, \mathcal{G})$ un espacio medible y sea $f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{G})$, entonces las funciones

$$cf, \qquad f^2, \qquad f + g, \qquad |f|, \qquad f^+ \qquad \text{y} \qquad f^-$$

pertenecen a $\mathcal{M}(E, \mathcal{G})$.

PROPOSICIÓN 1.21. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(E, \mathcal{G})$ y definamos las funciones

$$f(x) = \text{ínf} \, f_n(x), \quad F(x) = \sup f_n(x),$$

$$f^*(x) = \liminf f_n(x), \quad F^*(x) = \limsup f_n(x).$$

Entonces f, F, f^*, F^* pertenecen a $\mathcal{M}(E, \mathcal{G})$

PROPOSICIÓN 1.22. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(E, \mathcal{G})$ que converge a f puntualmente en todo E, entonces f es elemento de $\mathcal{M}(E, \mathcal{G})$.

DEFINICIÓN 1.17 (Función simple)**.** Sean $(E, \mathcal{G})$ y $(F, \mathcal{H})$ espacios medibles y $f\colon E \to F$ una función medible. Se dice que f es una *función simple* si toma un número finito de valores, es decir, si $f(E)$ es un conjunto finito.

DEFINICIÓN 1.18 (Función indicatriz)**.** Sea E un conjuntos y $A \subseteq E$. A la función

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A\colon E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A, \end{cases} \end{aligned}$$

se la llama la *función indicatriz* de A.

PROPOSICIÓN 1.23. Sean $(E, \mathcal{G})$ un espacio medible y $A \subseteq E$. Se tiene que la función $\mathbb{1}_A$ es $\mathcal{G}$-medible si y solo si el conjunto A es $\mathcal{G}$-medible.

PROPOSICIÓN 1.24. Sean $(E, \mathcal{G})$ un espacio medible y $f\colon E \to \mathbb{K}$ una función, donde $\mathbb{K}$ representa a $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$ o $\mathbb{C}$. Se tiene que f es una función simple si y solo si existen $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{G}$ y $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$$

para todo $x \in E$.

TEOREMA 1.25. Si f es una función no negativa en $\mathcal{M}(E, \mathcal{G})$, entonces existe una sucesión $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples en $\mathcal{M}(E, \mathcal{G})$ tal que:

1. $0 \leq \phi_n(x) \leq \phi_{n+1}(x)$ para todo $x \in E$ y $n \in \mathbb{N}$; y
2. $f(x) = \lim \phi_n(x)$ para todo $x \in E$.

1.2. Ejercicios Resueltos

EJERCICIO 1.1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Demuestre que

$$[a,b] = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right[.$$

Demostración. Se tiene que $[a,b] \subseteq \left]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right[$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, de este modo

$$[a,b] \subseteq \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right[.$$

Ahora, para la inclusión contraria, procedemos por contrarrecíproco. Sea $x \notin [a,b]$, entonces $x < a$ o $x > b$. Consideramos cada caso por separado:

- Si $x < a$, por la propiedad arquimediana, existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $k > \frac{1}{a-x}$. Por lo tanto, $x < a - \frac{1}{k}$ y por ende $x \notin \left]a - \frac{1}{k}, b + \frac{1}{k}\right[$, de donde

$$x \notin \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right[.$$

- Si $x > b$, de manera similar al caso anterior, existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $x \notin \left]a - \frac{1}{k}, b + \frac{1}{k}\right[$, por lo tanto

$$x \notin \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right[.$$

Así, se tiene que

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right[\subseteq [a,b];$$

y por lo tanto se cumple la igualdad. $\square$

EJERCICIO 1.2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Demuestre que

$$]a,b[= \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right].$$

Demostración. Se tiene que $\left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right] \subseteq \left]a, b\right[$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, por lo tanto

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right] \subseteq \left]a, b\right[.$$

Ahora, sea $x \in \left]a, b\right[$, esto es $a < x < b$. De manera análoga al ejercicios anterior, por la propiedad arquimediana, existen $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ tales que $a + \frac{1}{k_1} < x$ y $x < b - \frac{1}{k_2}$. Definimos $k = \max\{k_1, k_2\}$, entonces

$$x \in \left[a + \frac{1}{k}, b - \frac{1}{k}\right] \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right],$$

lo que completa la demostración. □

> **EJERCICIO 1.3.** Demuestre que la álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es también generada por la familia de intervalos semi-abiertos $\{\left]a, b\right] : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$.

Demostración. Se debe demostrar que

$$\sigma(\{\left]a, b\right] : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, de manera análoga a la demostración del ejercicio anterior, tenemos que $\left]a, b\right] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left]a, b + \frac{1}{n}\right[$, es decir, $\left]a, b\right]$ es la unión numerable de abiertos, por lo tanto $\left]a, b\right] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Así

$$\{\left]a, b\right] : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

por ende

$$\sigma(\{\left]a, b\right] : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Por otro lado, también se tiene que $\left]a, b\right[= \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left]a, b - \frac{1}{n}\right]$, es decir, $\left]a, b\right[$ es la unión numerable de intervalos semi-abiertos abiertos, por lo tanto

$$\left]a, b\right[\in \sigma(\{\left]a, b\right] : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\})$$

Así,

$$\{\left]a, b\right[: a, b \in \mathbb{R},\ a < b\} \subseteq \sigma(\{\left]a, b\right] : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\},$$

de donde

$$\sigma(\{]a, b[\, : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}) \subseteq \sigma(\{]a, b] : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}).$$

Por lo tanto, por la Proposición 1.6, tenemos que

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\{]a, b] : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}),$$

lo que completa la demostración. □

EJERCICIO 1.4. Demuestre que la álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es también generada por la familia de semi-rayos $\{]a, +\infty[\, : a \in \mathbb{R}\}$.

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}$, se tiene que $]a, +\infty[\, \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, por lo tanto,

$$\{]a, +\infty[\, : a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

luego

$$\sigma(\{]a, +\infty[\, : a \in \mathbb{R}\}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

Por otro lado, sea $b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, se tiene que

$$]a, b] = \,]a, +\infty[\, \cap (]b, +\infty[)^c \in \sigma(\{]a, +\infty[\, : a \in \mathbb{R}\}),$$

de donde

$$\{]a, b] : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\} \subseteq \sigma(\{]a, +\infty[\, : a \in \mathbb{R}\}),$$

luego

$$\sigma(\{]a, b] : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}) \subseteq \sigma(\{]a, +\infty[\, : a \in \mathbb{R}\}),$$

finalmente, utilizando el ejercicio anterior, se tiene que

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\{]a, +\infty[\, : a \in \mathbb{R}\}),$$

lo que completa la demostración. □

EJERCICIO 1.5. Sean E un conjunto y $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de E. Se define $E_0 = \emptyset$ y para $n \in \mathbb{N}^*$,

$$E_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \quad F_n = A_n \setminus E_{n-1}.$$

> Demuestre que $(E_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión creciente de conjuntos y que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión disjunta de conjuntos tales que
>
> $$\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

Demostración. Demostraremos que $(E_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión creciente de conjuntos, esto es, $E_n \subseteq E_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Sea $n \in \mathbb{N}^*$, se tiene que

$$E_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \subseteq \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cup A_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k = E_{n+1}.$$

Ahora, demostremos que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión disjunta. Sean $n, m \in \mathbb{N}^*$ con $n \neq m$, probemos que $F_n \cap F_m = \varnothing$. Por álgebra de conjuntos tenemos que

$$F_n \cap F_m = (A_n \setminus E_{n-1}) \cap (A_m \setminus E_{m-1}) = (A_n \cap A_m) \setminus (E_{n-1} \cup E_{m-1}).$$

Como $n \neq m$, supongamos, sin perder generalidad, que $n < m$, entonces $E_{n-1} \subseteq E_{m-1}$. Por lo tanto $E_{n-1} \cup E_{m-1} = E_{m-1}$, así

$$F_n \cap F_m = (A_n \cap A_m) \setminus E_{m-1}.$$

Por otro lado, como $n \leq m-1$, tenemos que

$$A_n \cap A_m \subseteq A_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} A_k = E_n \subseteq E_{m-1},$$

de lo que concluimos que $(A_n \cap A_m) \setminus E_{m-1} = \varnothing$, es decir, que $F_n \cap F_m = \varnothing$.

Finalmente, notemos que para todo $n \in \mathbb{N}^*$ tenemos $A_n \subseteq E_n$ entonces

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n.$$

Además, si $x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$ entonces $x \in E_m$ para algún $m \in \mathbb{N}^*$. Por el Principio de Buen Orden, podemos elegir a m como el menor elemento de $\mathbb{N}^*$ tal que $x \in E_m$, es decir $x \notin E_{m-1}$. Así, se tiene que $x \in A_m$, de donde

$$x \in A_m \setminus E_{m-1} = F_m \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n,$$

por lo tanto
$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n.$$

Finalmente, tenemos que $F_n \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, luego
$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

En resumen
$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

lo que completa la demostración. $\square$

EJERCICIO 1.6. Sean E un conjunto y $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de E. Si A es el conjunto de todos los $x \in E$ que pertenecen a una cantidad infinita de elementos de la sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, demuestre que $A = \text{lím sup}\, A_n$.

Demostración. Para $x \in E$, definimos el conjunto $N_x = \{n \in \mathbb{N} : x \in A_n\}$, se tiene que
$$A = \{x \in E : N_x \text{ es infinito}\}.$$

Sea $x \in A$, demostraremos que $x \in \bigcap_{m=0}^{+\infty} \left(\bigcup_{n=m}^{+\infty} A_n \right)$. Por lo tanto, sea $m \in \mathbb{N}$, como N_x es infinito, existe $k \in N_x$ tal que $k \geq m$. Así $x \in A_k$ entonces $x \in \bigcup_{n=m}^{+\infty} A_n$. Como m era arbitrario, concluimos que
$$x \in \bigcap_{m=0}^{+\infty} \left(\bigcup_{n=m}^{+\infty} A_n \right).$$

Recíprocamente, supongamos que $x \in \bigcap_{m=0}^{+\infty} \left(\bigcup_{n=m}^{+\infty} A_n \right)$. Por reducción al absurdo, supongamos que $x \notin A$, es decir, supongamos que N_x es finito; así, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq k$ para todo $k \in N_x$, por lo tanto $x \notin A_n$ para todo $n \geq m$. Pero, por otro lado $x \in \bigcap_{n=m}^{+\infty} A_n$, de donde, existe $n \geq m$ tal que $x \in A_n$, lo cual es contradictorio. Por lo tanto $x \in A$ y concluimos que

$$A = \limsup A_n. \qquad \square$$

EJERCICIO 1.7. Sean E un conjunto y $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de E. Si B es el conjunto de todos los $x \in E$ que pertenecen a todos elementos de la sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ excepto a un número finito de ellos, demuestre que $B = \liminf A_n$.

Demostración. Para $x \in E$ definimos $M_x = \{n \in \mathbb{N} : x \notin A_n\}$. Sea $x \in B$, entonces M_x es finito, por lo tanto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq k$ para todo $k \in M_x$. Por lo tanto. $x \in A_n$ para todo $n \geq m+1$, es decir, $x \in \bigcap_{n=m+1}^{+\infty} A_n$, por lo tanto

$$x \in \bigcup_{m=0}^{+\infty} \left(\bigcap_{n=m}^{+\infty} A_n \right).$$

Por otro lado, sea $x \in \bigcup_{m=0}^{+\infty} \left(\bigcap_{n=m}^{+\infty} A_n \right)$. Se tiene que existe $m_0 \geq 0$ tal que para todo $n \geq m_0$, $x \in A_n$. Por reducción al absurdo, supongamos que $x \notin B$, por lo tanto, M_x es infinito, así, existe $k \in M_x$ tal que $k \geq m_0$, lo cual es una contradicción, por lo tanto $x \in B$. Así, se tiene que

$$B = \liminf A_n. \qquad \square$$

EJERCICIO 1.8. Sean F un conjunto y $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de subconjuntos de F. Demuestre que

$$\limsup E_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n = \liminf E_n.$$

Demostración. Llamemos $E = \bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n$, demostraremos que $\bigcup_{n=m}^{+\infty} E_n = E$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Sea $m \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\bigcup_{n=m}^{+\infty} E_n \subseteq \bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n = E.$$

Ahora, si $x \in E$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E_k$. Si $k \geq m$, entonces $x \in \bigcup_{n=m}^{+\infty} E_n$, si $k < m$ se tiene que $E_k \subseteq E_m$, por lo tanto $x \in E_m$ y así $x \in \bigcup_{n=m}^{+\infty} E_n$. Con esto, de la definición de límite superior, tenemos que

$$\limsup E_n = \bigcap_{m=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{n=m}^{+\infty} E_n \right) = \bigcap_{m=1}^{+\infty} E = E.$$

Demostremos ahora, que $E_m = \bigcap_{n=m}^{+\infty} E_n$. Sean $m \in \mathbb{N}$ y $x \in E_m$, como la sucesión es creciente se tiene que $x \in E_n$ para todo $n \geq m$, es decir

$$x \in \bigcap_{n=m}^{+\infty} E_n.$$

Por otro lado, si $x \in \bigcap_{n=m}^{+\infty} E_n$ en particular $x \in E_m$. De aquí tenemos

$$\liminf E_n = \bigcup_{m=1}^{+\infty} \left(\bigcap_{n=m}^{+\infty} E_n \right) = \bigcup_{m=1}^{+\infty} E_m = E,$$

como se quería demostrar. □

EJERCICIO 1.9. Sean E un conjunto y $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de subconjuntos de E. Demuestre que

$$\limsup F_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty} F_n = \liminf F_n.$$

Demostración. Llamemos $F = \bigcap_{n=0}^{+\infty} F_n$. Demostremos que $F_m = \bigcup_{n=m}^{+\infty} F_n$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Sean $m \in \mathbb{N}$ y $x \in F_m$, entonces se tiene $x \in \bigcup_{n=m}^{+\infty} F_n$. Por otro lado, si $x \in \bigcup_{n=m}^{+\infty} F_n$, entonces existe $n \geq m$ tal que $x \in F_n$, como $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente se tiene que $F_n \subseteq F_m$, luego $x \in F_m$. De esto tenemos

$$\limsup F_n = \bigcap_{m=0}^{+\infty} \left(\bigcup_{n=m}^{+\infty} F_n \right) = \bigcap_{m=0}^{+\infty} F_m = F.$$

Ahora probemos que para todo $m \in \mathbb{N}$, tenemos que $\bigcap\limits_{n=m}^{+\infty} F_n = F$. Sea $m \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$F = \bigcap_{n=0}^{+\infty} F_n \subseteq \bigcap_{n=m}^{+\infty} F_n$$

Recíprocamente, si $x \in \bigcap\limits_{n=m}^{+\infty} F_n$, entonces $x \in F_n$ para todo $n \geq m$, por ser $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decreciente tenemos

$$x \in F_m \subseteq F_{m-1} \subseteq \cdots \subseteq F_1 \subseteq F_0,$$

es decir $x \in F_n$ para todo $n > m$, así $x \in \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} F_n = F$.

Con esto

$$\liminf F_n = \bigcup_{m=0}^{+\infty} \left(\bigcap_{n=m}^{+\infty} F_n \right) = \bigcup_{m=0}^{+\infty} F = F,$$

como se queria demostrar. □

> **EJERCICIO 1.10.** Dé un ejemplo de un espacio medible $(E, \mathcal{G})$ y una función $f \colon E \to \mathbb{R}$ que no sea $\mathcal{G}$-medible, pero que las funciones $|f|$ y f^2 sean $\mathcal{G}$-medibles

Demostración. Tomemos

$$E = \{a, b, c\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{G} = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b, c\}\},$$

se tiene que $(E, \mathcal{G})$ es un espacio medible. Definimos la función $f : E \to \mathbb{R}$ mediante $f(a) = f(c) = 1$ y $f(b) = -1$. Notemos que el conjunto

$$A_0 = \{x \in E : f(x) > 0\} = \{a, c\}$$

no pertenece a $\mathcal{G}$, por lo tanto, f no es medible.

Sin embargo es claro que $|f|$ y f^2 son las funciones constantes 1, por lo que, gracias a la Proposición 1.8, $|f|$ y f^2 son medibles. □

> **EJERCICIO 1.11.** Sean $(E, \mathcal{G})$ un espacio medible y $f_1, f_2 \colon E \to \mathbb{R}$ funciones

$\mathcal{G}$-medibles, demuestre que la función definida por

$$g(x) = \sup\{f_1(x), f_2(x)\}$$

es $\mathcal{G}$-medibles.

Demostración. Notemos que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces se tiene que

$$\sup\{a, b\} = \frac{a + b + |a - b|}{2},$$

pues, sin perdida de generalidad, asumiendo $a \leq b$, se tiene que $\sup\{a, b\} = b$, además $|a - b| = b - a$, y por lo tanto

$$\frac{a + b + |a - b|}{2} = \frac{a + b + b - a}{2} = b = \sup\{a, b\}.$$

De este modo, para $x \in E$,

$$\sup\{f_1(x), f_2(x)\} = \frac{f_1(x) + f_2(x) + |f_1(x) - f_2(x)|}{2}.$$

Así la función definida por $g(x) = \sup\{f_1(x), f_2(x)\}$ es medible pues, es combinación lineal de funciones medibles. □

EJERCICIO 1.12. Si a, b, c son números reales, sea $\text{mid}(a, b, c)$ el "valor en la mitad". Demuestre que

$$\text{mid}(a, b, c) = \inf\{\sup\{a, b\}, \sup\{a, c\}, \sup\{b, c\}\}.$$

Además, demuestre que si $(E, \mathcal{G})$ es un espacio medible y $f_1, f_2, f_3 \colon E \to \mathbb{R}$ son funciones $\mathcal{G}$-medibles, entonces la función g definida por

$$g(x) = \text{mid}(f_1(x), f_2(x), f_3(x)),$$

es $\mathcal{G}$-medible.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, asumamos que $a \leq b \leq c$, así tenemos que:

$$\sup\{a, b\} = b, \qquad \sup\{a, c\} = c, \qquad \text{y} \qquad \sup\{b, c\} = c.$$

Por lo que se tiene que

$$\text{ínf}\{\sup\{a, b\}, \sup\{a, c\}, \sup\{b, c\}\} = \text{ínf}\{b, c, c\} = b.$$

Además, por nuestra suposición inicial

$$\operatorname{mid}(a, b, c) = b.$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{ínf}\{\sup\{a, b\}, \sup\{a, c\}, \sup\{b, c\}\} = \operatorname{ínf}\{b, c, c\} = \operatorname{mid}(a, b, c)$$

Ahora definimos las funciones g_1, g_2, g_3 mediante:

$$g_1(x) = \sup\{f_1(x), f_2(x)\}, \qquad g_2(x) = \sup\{f_1(x), f_3(x)\}$$

y

$$g_3(x) = \sup\{f_2(x), f_3(x)\}$$

Por la Proposición 1.16, g_1, g_2, g_3 son $\mathcal{G}$-medibles y nuevamente por dicha proposición, g es medible, pues

$$g(x) = \operatorname{ínf}\{g_1(x), g_2(x), g_3(x)\}. \qquad \square$$

EJERCICIO 1.13. Sean $(E, \mathcal{G})$ un espacio medible y $f \colon E \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{G}$-medible. Demuestre que si $M > 0$, entonces el *truncamiento* f_M definido por

$$f_M(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } |f(x)| \leq M \\ M, & \text{si } f(x) > M \\ -M, & \text{si } f(x) < -M \end{cases}$$

es $\mathcal{G}$-medible.

Demostración. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y tomemos el conjunto

$$A_\alpha = \{x \in E : f_M(x) > \alpha\}.$$

Si $\alpha \geq M$, entonces $A_\alpha = \emptyset$, el cual es un conjunto $\mathcal{G}$-medible. Si $\alpha < -M$, entonces $A_\alpha = E$, el cual también es $\mathcal{G}$-medible.

Ahora, si $-M \leq \alpha < M$, tenemos que

$$A_\alpha = \{x \in E : f_M(x) > \alpha\} = \{x \in E : f(x) > \alpha\},$$

pues para $x \in E$, se tiene que

$$f_M(x) > \alpha \iff (f(x) > \alpha \quad \vee \quad M > \alpha \quad \vee \quad -M > \alpha) \iff f(x) > \alpha.$$

De esta manera, A_α también es un conjunto $\mathcal{G}$-medible. Esto prueba que f_M es $\mathcal{G}$-medible. $\square$

> **EJERCICIO 1.14.** Sean $(E, \mathcal{G})$ un espacio medible, F un conjunto y $f\colon E \to F$ una función. Demuestre que $\mathcal{H} = f(\mathcal{G})$ es una σ-álgebra sobre F.

Demostración. Se tiene que $\emptyset$ y F son elementos de $\mathcal{H}$, pues $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{G}$ y $f^{-1}(F) = E \in \mathcal{G}$.

Ahora, sea $A \in \mathcal{H}$, por lo tanto $f^{-1}(A) \in \mathcal{G}$. Así, se tiene que $f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c = \in \mathcal{G}$, es decir, $A^c \in \mathcal{H}$.

Finalmente, sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{H}$, así, $f^{-1}(A_n) \in \mathcal{G}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, como $\mathcal{G}$ es σ-álgebra, se tiene que

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} f^{-1}(A_n) \in \mathcal{G},$$

por ende $\bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n \in \mathcal{H}$. Consecuentemente, $\mathcal{H}$ es una σ-álgebra sobre F. $\square$

> **EJERCICIO 1.15.** Sean $(E, \mathcal{G})$ un espacio medible, F un conjunto y $f\colon E \to F$ una función. Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(F)$ tal que $f^{-1}(B) \in \mathcal{G}$ para todo $B \in \mathcal{C}$. Demuestre que $f^{-1}(B) \in \mathcal{G}$ para todo $B \in \sigma(\mathcal{C})$.

Demostración. Definamos

$$\mathcal{H} = \{B \subseteq F : f^{-1}(B) \in \mathcal{G}\}.$$

Por el ejercicio anterior, se tiene que $\mathcal{H}$ es una σ-álgebra sobre F, además, por hipótesis, se tiene que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{H}$, por lo tanto

$$\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{H},$$

es decir, $f^{-1}(B) \in \mathcal{G}$ para todo $B \in \sigma(\mathcal{C})$. $\square$

> **EJERCICIO 1.16.** Sean $(E, \mathcal{G})$ un espacio medible y $f\colon E \to \mathbb{R}$ una función. Entonces f es $\mathcal{G}$-medible si y solo si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple que
>
> $$\{x \in E : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{G}.$$

Demostración. Supongamos que f es $\mathcal{G}$-medible. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\{x \in E : f(x) < \alpha\} = f^{-1}(]-\infty, \alpha[),$$

además, como $]-\infty, \alpha[$ es un abierto de $\mathbb{R}$, se tiene que $]-\infty, \alpha[\, \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, por lo tanto,

$$\{x \in E : f(x) < \alpha\} = f^{-1}(]-\infty, \alpha[) \in \mathcal{G}.$$

Recíprocamente, supongamos que ara todo $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\{x \in E : f(x) < \alpha\} = f^{-1}(]-\infty, \alpha[) \in \mathcal{G}.$$

Por otro lado, análogamente al Ejercicio 1.4, se tiene que

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]-\infty, \alpha[\, : \alpha \in \mathbb{R}\}),$$

así, por el ejercicio anterior, se tiene que $f^{-1}(B) \in \mathcal{G}$ para todo

$$B \in \sigma(\{]-\infty, \alpha[\, : \alpha \in \mathbb{R}\}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

es decir, f es $\mathcal{G}$-medible. $\square$

Teoría de la Medida

El presente fascículo recolecta las principales definiciones, proposiciones y teoremas sobre Funciones Medibles, vistos en el curso de Teoría de la Medida, dictado en la carrera de Matemática de la Escuela Politécnica Nacional. Además, presenta un compendio de ejercicios resueltos referentes a este tema, los cuales han sido desarrollados por Leonardo Montoya, Pablo Rosero, estudiantes de la Facultad de Ciencias, bajo la supervisión de Andrés Merino, profesor del Departamento de Matemática.
Cualquier corrección, propuesta de cambio o mejora del presente trabajo se la puede realizar al correo: `mat.andresmerino@gmail.com`.

Proyecto CLAVEMAT

ISBN 978-0000-000-00-2

9 780000 000002 >