Fascículos de Matemática
del Proyecto CLAVEMAT

1 (3)

Análisis Matemático II

Apuntes de clase

3. Operadores adjuntos en espacios de Hilbert

Proyecto CLAVEMAT

Fascículos de Matemática
del Proyecto CLAVEMAT

Proyecto CLAVEMAT

Análisis Matemático II

Apuntes de clase

3. Operadores adjuntos en espacios de Hilbert

Fascículo de Matemática No. 1 (3)

ANÁLISIS MATEMÁTICO II: APUNTES DE CLASE
3. OPERADORES ADJUNTOS EN ESPACIOS DE HILBERT

PROYECTO CLAVEMAT

Escrito por: Andrés Merino - Andrés Miniguano

Responsable de la Edición: Andrés Merino
Revisión Académica: el texto aún no cuenta con revisión académica de pares

Registro de derecho autoral No.
ISBN: 978-0000-000-00-0

Publicado por el proyecto CLAVEMAT de la Escuela Politécnica Nacional, Ladrón de Guevara E11-253, Quito, Ecuador.

Primera edición: 2016
Primera impresión: 2016

Índice general

PREFACIO

El presente libro es la recopilación de los apuntes de clase de la asignatura «Análisis Matemático II» dictada por el profesor Mat. Andrés Merino en la carrera de Matemática de la Escuela Politécnica Nacional, y recopilados por el estudiante Andrés Miniguano, el cual cursó la asignatura en el semestre referencial 2014-B.

Esta asignatura aborda los temas de Espacios de Hilbert, Teoremas Clásicos del Análisis y Cálculo en Espacios de Banach.

Fascículo 3

Operadores adjuntos en espacios de Hilbert

En este capítulo se estudiarán los operadores adjuntos desde el punto de vista de los espacios de Hilbert, varias de sus propiedades, su clasificación y su relación con los operadores adjuntos en espacios normados.

3.1. Operadores adjuntos

Definición 3.1

Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Si existe

$$T^* \colon H_2 \to H_1$$

tal que para todo $x \in H_1$ y para todo $y \in H_2$ se cumple

$$\langle Tx, y \rangle_2 = \langle x, T^* y \rangle_1,$$

entonces a T^* se lo llama el adjunto *de T.*

Veremos a continuación, qué propiedades tiene el adjunto de un operador.

Proposición 3.1. Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, entonces existe un único operador adjunto de T, $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$, y además $\|T^*\| = \|T\|$.

Demostración. Sea

$$\begin{aligned} h\colon H_2 \times H_1 &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (y, x) &\longmapsto h(y, x) = \langle y, Tx \rangle_2. \end{aligned}$$

Vamos a dividir la demostración en tres partes.

- **Existencia:** La función h es lineal respecto a la primera componente y semilineal respecto a la segunda. Por lo tanto h es sesquilineal. Por otro lado:
$$\left|h(y,x)\right| = \left|\langle y, Tx\rangle_2\right| \leq \|y\|_2\|Tx\|_2 \leq \|T\|\,\|y\|_2\|x\|_1.$$
Usando el teorema de representación de Riesz (ver **??**) podemos ver que existe $T^*\colon H_2 \to H_1$, acotada, tal que
$$h(y,x) = \langle T^*y, x\rangle_1,$$
para todo $x \in H_1$ y $y \in H_2$.

  Luego,
$$\langle Tx, y\rangle_2 = \langle x, T^*y\rangle_1.$$
para todo $x \in H_1$ y $y \in H_2$.

- **Unicidad:** Supongamos que existe $S\colon H_2 \to H_1$ tal que para todo $x \in H_1$ y $y \in H_2$
$$\langle Tx, y\rangle_2 = \langle x, Sy\rangle_1 = \langle x, T^*y\rangle_1.$$
Entonces
$$\langle x, Sy - T^*y\rangle_1 = 0$$
para todo $x \in H_1$ y $y \in H_2$, de donde obtenemos que
$$Sy - T^*y = 0$$
para todo $y \in H_2$. Por tanto $S = T^*$.

- **Norma:** Para todo par $(x,y) \in H_1 \times H_2$, tenemos que
$$\left|h(y,x)\right| = \left|\langle T^*y, x\rangle_1\right| \leq \|T^*\|\,\|y\|_2\|x\|_1.$$
Pero, si tomamos $y = Tx$, entonces
$$\left|h(Tx,x)\right| \leq \|T^*\|\,\|Tx\|_2\|x\|_1.$$
por otro lado, sabemos que $h(Tx,x) = \langle Tx, Tx\rangle_2$, de donde
$$\|Tx\|_2^2 \leq \|T^*\|\,\|Tx\|_2\|x\|_1.$$

Ahora, si $Tx \neq 0$, tenemos que

$$\|Tx\|_2 \leq \|T^*\| \|x\|_1;$$

es claro que esto se cumpe si $Tx = 0$. Luego $\|T\| \leq \|T^*\|$.

Ahora, para $x = T^*y$, evaluando en h

$$\left|h(y, T^*y)\right| = \left|\langle y, T(T^*y)\rangle_2\right| = \left|\langle TT^*y, y\rangle_2\right| = \left|\langle T^*y, T^*y\rangle_1\right| = \|T^*y\|_1^2.$$

Por otro lado

$$\left|h(y, T^*y)\right| \leq \|y\|_2 \|TT^*y\|_2^2 \leq \|y\|_2 \|T\| \|T^*y\|_1.$$

Luego

$$\|T^*y\|_1^2 \leq \|T\| \|T^*y\|_1 \|y\|_2.$$

Entonces para todo $y \in H_2$ se cumple que

$$\|T^*y\|_1 \leq \|T\| \|y\|_2,$$

lo cual implica que

$$\|T^*\| \leq \|T\|,$$

de donde, $\|T^*\| \leq \|T\|$. □

Veamos un ejemplo sencillo en dimensión finita.

EJERCICIO 3.1. Sea T el operador definido por

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^3 \quad &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3)^\top &\longmapsto (x_1 + x_2, -2x_3)^\top. \end{aligned}$$

O, mediante el isomorfismo que existe entre $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, con representación matricial

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Encontrar su adjunto.

Demostración. Buscamos un operador que cumpla

$$\langle Tx, y\rangle_2 = \langle x, T^*y\rangle_1.$$

Para ello, sean $x \in \mathbb{R}^3$ y $y \in \mathbb{R}^2$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\langle Tx, y\rangle_2 &= \left\langle T(x_1, x_2, x_3)^\top, (y_1, y_2)^\top \right\rangle_2 \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle_2 \\
&= x_1y_1 + x_2y_1 - 2x_3y_2 \\
&= \left\langle (x_1, x_2, x_3)^\top, (y_1, y_1, -2y_2)^\top \right\rangle_1 \\
&= \langle x, T^*y\rangle_1,
\end{aligned}
$$

donde

$$
[T^*] := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = [T]^\top . \qquad \square
$$

A partir de este ejemplo, podemos deducir lo siguiente para espacios de Hilbert de dimensión finita.

Observación. Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert de dimensión m y n respectivamente. Podemos caracterizar los operadores adjuntos de acuerdo al campo como sigue.

- **En $\mathbb{R}$:** Todo operador $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ se lo puede representar como $[T] \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$.

  Luego

  $$\langle Tx, y\rangle_2 = \left([T]x\right)^\top y = x^\top [T]^\top y = \left\langle x, [T]^\top y \right\rangle_1 = \langle x, T^*y\rangle_1.$$

  Por tanto $[T^*] = [T]^\top$.

- **En $\mathbb{C}$:** Todo operador $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ se lo puede representar como $[T] \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$.

  Luego

  $$\langle Tx, y\rangle_2 = \left([T]x\right)^\top \overline{y} = x^\top [T]^\top \overline{y} = \left\langle x, \overline{[T]}^\top y \right\rangle_1 = \langle x, T^*y\rangle_1.$$

  Por tanto $[T^*] = \overline{[T]}^\top$.

Veamos ahora el caso de un operador con rango finito.

> **EJERCICIO 3.2.** Sea T el operador lineal y continuo definido por
>
> $$\begin{aligned} T\colon \quad \ell^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} &\longmapsto (x_0, x_1). \end{aligned}$$
>
> Encontrar su adjunto.

Demostración. Notemos que $\mathbb{R}^2$ se lo puede considerar como el subespacio cerrado de $\ell^2(\mathbb{R})$ generado por

$$\big\langle (1,0,0,\dots),(0,1,0,\dots)\big\rangle.$$

Sean $x, y \in \ell^2(\mathbb{R})$, entonces

$$\begin{aligned} \langle Tx, y\rangle &= \big\langle (x_0, x_1), (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\big\rangle \\ &= x_0y_0 + x_1y_1 \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n z_n \end{aligned}$$

donde $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (y_0, y_1, 0, 0, \dots)$, por tanto, podemos definir

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$$

con

$$\begin{aligned} T^*\colon \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{R}) \\ (y_0, y_1) &\longmapsto (y_0, y_1, 0, 0, \dots). \end{aligned}$$ □

Ahora, veamos ahora un par de ejemplos conocidos en espacios de dimensión infinita.

> **EJERCICIO 3.3.** Sea T el operador *shift izquierda* definido por
>
> $$\begin{aligned} T\colon \quad \ell^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{R}) \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} &\longmapsto (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}. \end{aligned}$$
>
> Encontrar su adjunto.

Demostración. Tenemos que para todo $x, y \in \ell^2(\mathbb{R})$

$$\langle Tx, y\rangle_2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} Tx_n y_n = 0\cdot x_0 + x_1y_0 + x_2y_1 + \ldots = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_{n+1}y_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n z_n,$$

donde $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, y_0, y_1, \ldots)$ y entonces tenemos que

$$\begin{aligned} T^*\colon \ \ell^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{R}) \\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} &\longmapsto (0, y_0, y_1, \ldots) = (y_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}, \end{aligned}$$

con $y_{-1} = 0$. A este operador se lo denomina *shift derecha*.

Además, no es difícil ver que $T^{**} = T$. □

Ejercicio 3.4. Sea

$$\begin{aligned} T\colon \mathscr{L}^2[0,1] &\longrightarrow \mathscr{L}^2[0,1] \\ x &\longmapsto Tx, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} Tx\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \int_0^t x(\tau)\, d\tau. \end{aligned}$$

Determine su adjunto.

Demostración. Sean $x, y \in \mathscr{L}^2[0,1]$, tenemos que

$$\langle Tx, y\rangle = \int_0^1 Tx(t)y(t)\, dt = \int_0^1 \left(\int_0^t x(\tau)d\tau\right) y(t)\, dt$$

tomando

$$\begin{aligned} u &= \int_0^1 x(\tau)\, d\tau, & du &= x(t)\, dt \\ v &= -\int_t^1 y(\tau)\, d\tau, & dv &= y(t)\, dt \end{aligned}$$

y recordando que $\int uv' = uv - \int u'v$, entonces lo anterior es igual a

$$\begin{aligned} \langle Tx, y\rangle &= -\left(\int_0^t x(\tau)\, d\tau\right)\left(\int_t^1 y(\tau)\, d\tau\right)\Bigg|_0^1 + \int_0^1 x(t)\int_t^1 y(\tau)\, d\tau dt \\ &= \int_0^1 x(t) \overbrace{\int_t^1 y(\tau)\, d\tau}^{T^*y(t)}\, dt. \end{aligned}$$

Por tanto $T^*y(t) = \int_t^1 y(\tau)d\tau$. □

A continuación, veremos una propiedades adicionales de espacios con producto interno que nos serán importantes para ciertos resultados.

PROPOSICIÓN 3.2. Sean E, F espacios vectoriales con producto interno y $Q\colon E \to F$ lineal.

1. $Q = 0$ si y solo si $\langle Qx, y\rangle_F = 0$, para todo $x \in E$ y $y \in F$.
2. Si $F = E$, E complejo y $\langle Qx, x\rangle = 0$, para todo $x \in E$, entonces $Q = 0$.

Demostración. La demostración irá en dos partes.

1. La primera implicación es inmediata. Veamos la segunda, para ello, sean $x \in E$ y $y =: Qx$. Luego
$$\langle Qx, Qx\rangle_F = 0$$
lo cual implica que $Qx = 0$ para todo $x \in E$ y entonces, necesariamente, se tiene que $Q = 0$.

2. Sean $x, y \in E$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, tenemos que
$$0 = \big\langle Q(x + \alpha y), x + \alpha y\big\rangle = \langle Qx, x\rangle + \alpha\langle Qx, y\rangle + \overline{\alpha}\langle Qx, y\rangle + \alpha\overline{\alpha}\langle Qy, y\rangle,$$
entonces
$$0 = \alpha\,\langle Qy, x\rangle + \overline{\alpha}\,\langle Qx, y\rangle\,.$$
Sin pérdida de generalidad, podemos realizar lo siguiente
   - Si $\alpha = 1$, entonces $0 = \langle Qy, x\rangle + \langle Qx, y\rangle$.
   - Si $\alpha = i$, entonces $0 = \langle Qy, x\rangle - \langle Qx, y\rangle$.

   Sumando las anteriores, obtenemos que $0 = \langle Qy, x\rangle$, para todo $x, y \in E$.

   Finalmente, $Q = 0$. □

A continuación, enunciaremos un teorema, el cual dejamos sin demostración (ver [4, p. 198].), con propiedades adicionales que cumplen los adjuntos entre espacios de Hilbert.

TEOREMA 3.3

Sean H_1, H_2 Hilberts, $T, S \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Entonces se tiene que

1. $\langle T^* y, x\rangle_1 = \langle y, Tx\rangle_2$.
2. $(S + T)^* = S^* + T^*$.
3. $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$.

4. $(T^*)^* = T$.

5. $\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$.

6. $T^*T = 0$ *implica* $T = 0$.

7. $(ST)^* = T^*S^*$.

Ahora, si bien en el capítulo anterior tratamos brevemente a los adjuntos en espacios de Banach, uno se pregunta si existe alguna relación con los adjuntos en espacios de Hilbert, los cuales a su vez son espacios de Banach. Tenemos el siguiente resultado de forma natural.

OBSERVACIÓN (Relación con los operadores adjuntos en espacios de Banach)**.** Sean E_1, E_2 espacios de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Recordemos que existe $T^\times : E_2^* \to E_1^*$ tal que $T^\times(f) = f \circ T$, para todo $f \in E_2^*$.

Sea $f \in E_2^*$, por el teorema de representación de Riesz, sabemos que existe $z \in E_2$ tal que $f(y) = \langle y, z\rangle_2$, para todo $y \in E_1$. Luego

$$T^\times(f)(x) = (f \circ T)(x) = f(Tx) = \langle Tx, z\rangle_2.$$

De igual manera, existe $z' \in E_1$ tal que $T^\times(f)(y) = \langle y, z'\rangle_1$, para todo $y \in E_1$; es decir

$$\langle Tx, z\rangle_2 = \langle x, z'\rangle_1, \qquad \forall x \in E_1.$$

Recordemos además que por el teorema de Riesz, para $i \in [\![1, 2]\!]$, la función

$$\begin{aligned} \rho_i \colon E_i &\longrightarrow E_i^* \\ x &\longmapsto \rho_i(x), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \rho_i(x) \colon E_i &\longrightarrow \mathbb{K} \\ y &\longmapsto \rho_i(x)(y) = \langle y, x\rangle_i, \end{aligned}$$

es una isometría biyectiva. Así, se tiene que $\rho_1(z') = T^\times(f)$ y $\rho_2(z) = f$.

Con esto, tenemos que para $x \in E_1$

$$\langle x, T^*z\rangle_1 = \langle Tx, z\rangle_2 = \langle x, z'\rangle_1.$$

Entonces

$$T^*z = z' = \rho_i^{-1}\big(T^\times(f)\big),$$

por tanto
$$T^*\left(\rho_2^{-1}(f)\right) = \rho_1^{-1}(T^\times(f)).$$
De aquí, obtenemos que
$$T^\times = \rho_1 \circ T^* \circ \rho_2^{-1} \qquad \text{o} \qquad T^* = \rho_1^{-1} \circ T^\times \circ \rho_2.$$
Así, tenemos finalmente el siguiente diagrama:
$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xleftarrow{T} & E_2 \\ \rho_1 \updownarrow & & \updownarrow \rho_2 \\ E_1^* & \xleftarrow{T^\times} & E_2^* \end{array}$$

Para concluir esta sección, realizaremos tres ejercicios.

EJERCICIO 3.5. Encuentre el adjunto del operador
$$\begin{aligned} T\colon \quad \ell^2(\mathbb{C}) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{C}) \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} &\longmapsto (x_0 + x_1, 0, x_2 + x_3, 0, \ldots). \end{aligned}$$

Demostración. Tenemos que para todo $x, y \in \ell^2(\mathbb{C})$
$$\langle Tx, y\rangle_2 = (x_0 + x_1)\overline{y}_0 + 0\cdot\overline{y}_1 + (x_2 + x_3)\overline{y}_2 + 0\cdot\overline{y}_3 + \ldots$$
de donde, al expandir los productos, obtenemos
$$\langle x, T^*y\rangle_1 = x_0\overline{y}_0 + x_1\overline{y}_0 + x_2\overline{y}_2 + x_3\overline{y}_2 + \ldots,$$
donde
$$\begin{aligned} T^*\colon \quad \ell^2(\mathbb{C}) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{C}) \\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} &\longmapsto (y_0, y_0, y_2, y_2, y_4, y_4, \ldots). \end{aligned}$$
Este operador está bien definido pues para todo $y \in \ell^2(\mathbb{C})$ pues tenemos que
$$\sum |y_n|^2 < +\infty,$$
entonces
$$\sum |y_{2n}|^2 < +\infty.$$
Por tanto
$$\sum |T^*y_n|^2 = 2\sum |y_{2n}|^2 < +\infty. \qquad \square$$

EJERCICIO 3.6. Sea $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ biyectiva. Encuentre una expresión para $\left(T^{-1}\right)^*$.

Demostración. Veamos primero un caso más sencillo: para $H_1 = H_2$ tenemos que la aplicación identidad cumple que

$$\langle Ix, y \rangle = \langle x, Iy \rangle,$$

de donde

$$I = I^*.$$

Ahora, veamos el caso general: sabemos que $I = T^{-1}T$ y que $I = TT^{-1}$, por el teorema 3.3 tenemos que $I = (T^*)(T^{-1})^*$ y que $I = (T^{-1})^*(T^*)$, entonces

$$\left(T^{-1}\right)^* = \left(T^*\right)^{-1}.$$

□

EJERCICIO 3.7. Sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de operadores en $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ que converge a T. Demostrar que $T_n^* \to T^*$.

Demostración. La prueba es inmediata pues

$$\left\|(T_n - T)^*\right\| = \|T_n - T\| \to 0.$$

□

3.2. Operadores autoadjuntos, unitarios y normales

En la siguiente sección, veremos brevemente una clasificación entre los adjuntos de operadores en un espacio de Hilbert y vamos a describir algunas de sus propiedades.

DEFINICIÓN 3.2

Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$.

1. *Se dice que T es* autoadjunto *si $T^* = T$.*
2. *Se dice que T es* unitario *si T es biyectiva y $T^{-1} = T^*$.*
3. *Se dice que T es* normal *si $TT^* = T^*T$.*

Veamos cuál es la relación que existe entre estos operadores.

PROPOSICIÓN 3.4. Sea H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$.

1. Si T es autoadjunto, entonces T es normal.
2. El recíproco, en general, no se da.

Demostración. La demostración va en dos partes como sigue.

1. Tenemos que $TT^* = TT = T^*T$, por lo tanto T es normal.
2. Tomemos los operadores, anteriormente definidos, shift izquierda y shift derecha. Tenemos que $T^*T = I = TT^*$, pero $T \neq T^*$, por lo tanto T es normal pero no autoadjunto. □

Otro ejemplo es iI, que claramente es un operador unitario y normal pero no es autoadjunto. Ahora, veamos un ejemplo de un operador normal pero que no es autoadjunto ni unitario

EJEMPLO 3.1. El operador $T = 2iI$ con adjunto $T^* = -2iI$ es normal pero no es autoadjunto ni unitario. T es normal puesto que

$$TT^* = (2 \cdot -2)(i \cdot i)I^2 = 4I = (-2i)(2i)I^2 = T^*T.$$

Por otro lado, es claro que

$$T \neq T^*,$$

por lo que no es autoadjunto.

Finalmente, tenemos que

$$TT^* = 4I \neq I$$

y además $T^{-1} = \dfrac{i}{2}I$, de donde T no es unitario.

Por último, veamos qué relación existe entre operadores unitarios y normales.

PROPOSICIÓN 3.5. Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ unitario, entonces T es normal.

Demostración. Se tiene que

$$TT^* = TT^{-1} = I = T^{-1}T = T^*T,$$

por lo tanto T es normal. □

OBSERVACIÓN. Nótese que si un operador es autoadjunto o unitario, entonces el operador es normal. Pero los recíprocos no se dan. Así mismo, se puede ver fácilmente (por ejemplo, el caso de una matriz en dimensión finita) que en general no hay relación entre operadores autoadjuntos y unitarios.

EJERCICIO 3.8. Sea

$$\begin{aligned} T\colon \quad \ell^2(\mathbb{C}) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{C}) \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} &\longmapsto T(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

¿Es T normal?

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} T\circ T^*\colon \quad \ell^2(\mathbb{C}) &\longrightarrow \quad \ell^2(\mathbb{C}) \quad \longrightarrow \ell^2(\mathbb{C}) \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} &\longmapsto (x_{n-1})_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \text{con } x_{-1} = 0 \end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} T^*\circ T\colon \quad \ell^2(\mathbb{C}) &\longrightarrow \quad \ell^2(\mathbb{C}) \quad \longrightarrow \ell^2(\mathbb{C}) \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} &\longmapsto (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \text{con } x_0 = 0. \end{aligned}$$

Por tanto $T\circ T^* \neq T^*\circ T$, es decir, T no es normal. □

Ahora veamos una caracterización importante de los operadores autoadjuntos.

PROPOSICIÓN 3.6. Sea $T \in \mathcal{L}(H)$, con H un Hilbert complejo, entonces T es autoadjunto si y solo si $\langle Tx, x\rangle$ es real para todo $x \in H$.

Demostración. Para la una implicación, sea $x \in H$, tenemos que

$$\langle Tx, x\rangle = \langle x, T^*x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle},$$

de donde $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$.

Para la otra implicación, sea $x \in H$, tenemos que

$$\langle Tx, x\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle} = \langle x, Tx\rangle = \langle T^*x, x\rangle,$$

entonces $\big\langle (T-T^*)x, x\big\rangle = 0$.

Y dado que esto último se cumple para todo $x \in H$, tenemos que $T - T^* = 0$ y por tanto $T = T^*$. □

En el caso de endomorfismos, es fácil ver que el conjunto de los operadores autoadjuntos es un grupo abeliano con la operación suma. Ahora, veamos si el producto de este tipo de operadores es una operación interna.

PROPOSICIÓN 3.7. Sean $T, S \in \mathcal{L}(H)$ autoadjuntos, entonces ST es autoadjunto si y solo si $ST = TS$.

Demostración. Por un lado, tenemos que $(ST)^* = T^*S^* = TS$ y $(ST)^* = ST$, entonces $ST = TS$.

Para la otra implicación, notemos que $(ST)^* = T^*S^* = TS = ST$, entonces ST es autoadjunto. □

Así vemos que la suma y la composición de operadores no determinan un subanillo en el conjunto de endomorfimos autoadjuntos.

TEOREMA 3.8

Sean H un espacio de Hilbert y $\Psi\colon \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H)$ tal que $\Psi(T) = T^*$, entonces Ψ es continua.

Demostración. Sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{L}(H)$ que converge a T. Tenemos que

$$\left\|\Psi(T_n) - \Psi(T)\right\| = \left\|(T_n - T)^*\right\| = \|T_n - T\| \to 0,$$

por tanto Ψ es continua. □

Veamos ahora una serie de propiedades que comparten los operadores unitarios.

PROPOSICIÓN 3.9. Sean H un espacio de Hilbert y $U, V \in \mathcal{L}(H)$ unitarios, entonces

1. U es una isometría; es decir, $\|Ux\| = \|x\|$, para todo $x \in H$.
2. $\|U\| = 1$ cuando $H \neq \{0\}$.
3. U^{-1} es unitario.
4. UV es unitario.

> 5. T es unitario en $\left(H,+,\cdot,\mathbb{C}\right)$ si y solo si es biyectivo e isométrico.

Demostración.

1. $U^{-1}=U^*$, entonces
$$\|Ux\|^2=\langle Ux,Ux\rangle=\langle x,UU^*x\rangle=\langle x,x\rangle=\|x\|^2.$$
2. $\|UU^*\|=\|I\|=1=\|U\|^2=\|U\|$.
3. $\left(U^{-1}\right)^*=(U^*)^{-1}$, entonces U^{-1} es unitario.
4. $(UV)^*=V^*U^*=V^{-1}U^{-1}=(UV)^{-1}$.
5. La primera implicación es clara por lo anterior. Para la segunda, sea $x\in H$, se tiene que
$$\langle T^*Tx,x\rangle=\langle Tx,Tx\rangle=\|Tx\|^2=\|x\|^2=\langle x,x\rangle,$$
entonces
$$\left\langle (T^*T-I)x,x\right\rangle=0,$$
de donde, al ser H complejo, se tiene que $T^*T=I$.

   Luego
$$TT^*=TT^*(TT^{-1})=T(T^*T)T^{-1}=TT^{-1}=I,$$
entonces $T^{-1}=T^*$. □

Para finalizar esta sección, vamos a realizar unos ejercicios teóricos adicionales donde aplicaremos los resultados que hemos enunciado.

> **EJERCICIO 3.9.** Sean H un Hilbert sobre $\mathbb{R}$ y $\mathcal{A}(H)$ el conjunto de todos los operadores autoadjuntos de H. Demostrar que es $\mathcal{A}(H)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}(H)$.

Demostración. Es claro que $\mathcal{A}(H)$ es un subespacio de $\mathcal{L}(H)$ pues $0^*=0$. Para todo $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ y $T_1,T_2\in\mathcal{A}(H)$, se tiene que
$$(\alpha T_1+\beta T_2)^*=\alpha T_1^*+\beta T_2^*=\alpha T_1+\beta T_2\in\mathcal{A}(H).$$

Ahora, sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{A}(H)$ tal que $T_n\to T$. Tenemos que $T_n=T_n^*\to T$, entonces $T_n\to T^*$ y $T=T^*$, esto último se da por el teorema 3.8. De donde, finalmente, $T\in\mathcal{A}(H)$. □

Por otro lado, si H fuese complejo, es claro que $\mathcal{A}(H)$ no es un subespacio complejo de $\mathcal{L}(H)$.

> **Ejercicio 3.10.** Sea H un Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjunto. Demostrar que T^n es autoadjunto para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Primero, $T^0 = I$ que es autoadjunto. Luego T^1 lo es por hipótesis. Además $T^2 = TT$ es autoadjunto pues $(TT)^* = T^*T^* = TT$. Por inducción, supongamos que T^k es autoadjunto para $k \geq 2$. Luego

$$(T^{k+1})^* = (T^kT)^* = T^*(T^k)^* = TT^k = T^{k+1},$$

por tanto T^{k+1} es autoadjunto. □

> **Ejercicio 3.11.** Sea H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H) \setminus \{0\}$ autoadjunto. Demostrar que $T^n \neq 0$.

Demostración. Primero, demostraremos que $\|T^{2n}\| = \|T\|^{2n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por inducción, se tiene que $\|T^2\| = \|TT\|^2 = \|T^*T\| = \|T\|^2$. Luego, supongamos que $\left\|T^{2^n}\right\| = \|T\|^{2^n}$, entonces

$$\left\|T^{2^{n+1}}\right\| = \left\|T^{2^n \cdot 2}\right\| = \left\|T^{2^n}T^{2^n}\right\| = \left\|T^{2^n}\left(T^{2^n}\right)^*\right\| = \left\|T^{2^n}\right\|^2 = \|T\|^{2^{n+1}}.$$

Ahora, por reducción al absurdo, supongamos que $T^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $T^{2^n} = T^nT^{2^n-n} = 0$, pero sabíamos que $T^{2^n} \neq 0$, lo cual es absurdo, por lo tanto $T^n \neq 0$. □

> **Ejercicio 3.12.** Sean H un espacio de Hilbert y $U, T \in \mathcal{L}(H)$ con U unitario y T autoadjunto. Demostrar que UTU^{-1} es autoadjunto.

Demostración. Tenemos que

$$\left(UTU^{-1}\right)^* = \left(TU^{-1}\right)^*(U^*) = \left(U^{-1}\right) * TU^* = UTU^{-1},$$

de donde es claro el resultado. □

EJERCICIO 3.13. Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Demuestre que $\left(T^*(H_2)\right)^{\perp} = \ker(T)$.

Demostración. Para la primera implicación, sea $x \in \left(T^*(H_2)\right)^{\perp}$, entonces $x \perp T^*(H_2)$. Esto es $\langle x, y \rangle = 0$, para todo $y \in T^*(H_2)$; pero $y = T^*u$ con $u \in H_2$, por lo tanto

$$\langle x, T^*u \rangle_1 = \langle Tx, u \rangle_2 = 0,$$

para todo $u \in H_2$, entonces $Tx = 0$. Lo cual implica que $x \in \ker(T)$.

Para la segunda implicación, sea $x \in \ker(T)$, entonces $Tx = 0$, de donde

$$\langle Tx, u \rangle_2 = 0,$$

para todo $u \in H_2$. Pero

$$\langle Tx, u \rangle_2 = \langle x, T^*u \rangle_1 = 0,$$

entonces $x \perp T^*u$ y por ende

$$x \in \left(T^*(H_2)\right)^{\perp}. \qquad \square$$

3.3. Ejercicios propuestos

1. Sea
$$\begin{aligned} T\colon \ \ell^2(\mathbb{C}) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{C}) \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} &\longmapsto (x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}, \end{aligned}$$
encuentre T^*.

2. ¿Un operador autoadjunto y biyectivo, es unitario? ¿ Lo inverso se cumple?

3.4. Ejercicios resueltos

EJERCICIO 3.14. Sea H un espacio de Hilbert y F un subespacio cerrado de H, demostrar, sin usar el teorema de Hahn–Banach, que para $f \in F^*$, existe $\tilde{f} \in H^*$ tal que $\tilde{f}$ extiende a f y $\|\tilde{f}\|_{H^*} = \|f\|_{F^*}$.

Demostración. Como F es cerrado en un espacio de Hilbert, se tiene que a su vez es Hilbert. Usando el teorema de representación de Riesz se tiene que para $f \in F^*$ existe $z \in F$ tal que
$$f(x) = \langle x, z\rangle,$$
para todo $z \in F$. Además $\|f\|_{F^*} = \|z\|$. Con esto se define la función
$$\begin{aligned} \tilde{f}\colon H &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \langle x, z\rangle, \end{aligned}$$
y se tiene que $\tilde{f} \in H^*$. Además $\left\|\tilde{f}\right\|_{H^*}$ por lo que $\left\|\tilde{f}\right\|_{H^*} = \|f\|_{F^*}$. □

EJERCICIO 3.15. Sea E un espacio de Banach y
$$\begin{aligned} T\colon E &\longrightarrow E^* \\ x &\longmapsto f_x \end{aligned}$$
un operador lineal que satisface
$$f_x(x) \geq 0,$$
para todo $x \in E$. Demostrar que T es acotado. (Sugerencia: Utilizar el teorema del grafo cerrado. Para $y \in E$, si $x_n \to x$. ¿Qué ocurre con $f_{x-y}(x-y)$? ¿Y si $y = x - tz$, con

> $z \in E$ y $t \in \mathbb{R}$?)

Demostración. Sea $\big(x_n, T(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de graf(T) que converge a (x, f) en $E \times E^*$; se tiene que $x_n \to x$ y $T(x_n) = f_{x_n} \to f$. Con esto, para $y \in E$, se tiene que

$$(f_{x_n} - f_y)(x_n - y) \geq 0.$$

Tomando el límite

$$(f - f_y)(x - y) \geq 0,$$

o que es lo mismo

$$\big(f - T(y)\big)(x - y) \geq 0.$$

Con esto, tomando $y = x - tz$ con $z \in E$ y $t \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$(f - f_x - tf_z)(tz) = \big(f - T(x - tz)\big)(tz) \geq 0;$$

es decir,

$$tf(z) - tf_x(z) + t^2 f_z(z) \geq 0.$$

Suponiendo que $t > 0$, tenemos que

$$f(z) - f_x(z) + tf_2(z) \geq 0.$$

Con esto, tomando el límite cuando t tiende a cero por derecha

$$f(z) - f_x(z) \geq 0.$$

De manera análoga, para $t < 0$ y tomando el límite cuando t tiende a cero por izquierda

$$f(z) - f_x(z) \leq 0.$$

Por lo tanto $f(z) = f_x(z)$ para todo $z \in E$; es decir, $T(x) = f$, entonces graf(T) es cerrado. Como E y E^* son espacios de Banach, se puede aplicar el teorema del grafo cerrado y luego T es acotado. □

> **EJERCICIO 3.16.** Sean E y F espacios vectoriales normados tales que $E \neq \{0\}$ y $F \neq \{0\}$. Demostrar que $\mathcal{L}(E, F) \neq \{0\}$.

Demostración. Como $E \neq \{0\}$, existe $x_0 \in E$ tal que $x_0 \neq 0$ y, por el teorema de Hahn-Banach para espacios normados, existe $f \in E^*$ tal que $\|f\| = 1$ y $f(x_0) = \|x_0\|$. Ahora, dado que $F \neq \{0\}$, existe $y \in E$ tal que $y \neq 0$.

Definamos

$$\begin{aligned} T\colon E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x)\cdot y. \end{aligned}$$

Este operador es lineal pues f es lineal y es acotado ya que

$$\|T(x)\| = \|f(x)\cdot y\| = |f(x)|\|y\| \leq \|f\|\|x\|\|y\|.$$

Luego $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Finalmente $T(x_0) = f(x_0)\cdot y = \|x_0\|\cdot y \neq 0$, por lo tanto $T \neq 0$ y por ende $\mathcal{L}(E,F)$ no es trivial. □

EJERCICIO 3.17. Calcular el operador adjunto de

$$\begin{aligned} T\colon \quad \ell^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{R}) \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} &\longmapsto \left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Demostración. Nótese que el operador T puede ser visto como $\frac{1}{2}(I+S)$, donde el operador S es el operador *shift* a la izquierda, del cual, su adjunto es el operador *shift* a la derecha. Por lo tanto

$$T^* = \frac{1}{2}(I+S^*);$$

es decir,

$$T^*\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = (y_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

donde

$$y_n = \begin{cases} \dfrac{y_0}{2} & \text{si } n = 0, \\ \dfrac{y_n + y_{n-1}}{2} & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

□

EJERCICIO 3.18. Sea H un espacio de Hilbert complejo y $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador normal, demostrar que

1. para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda I - T$ es normal.
2. para todo $x \in H$, $\|Tx\| = \|T^*x\|$.
3. para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $\ker(\lambda I - T) = \ker\left(\overline{\lambda} I - T^*\right)$.

Demostración.

1. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, se tiene que

$$\begin{aligned}(\lambda I - T)(\lambda I - T)^* &= (\lambda I - T)(\overline{\lambda} I - T^*) \\ &= \lambda\overline{\lambda} I - \overline{\lambda} T - \lambda T + TT^* \\ &= \lambda\overline{\lambda} I - \lambda T - \overline{\lambda} T + T^*T \\ &= (\overline{\lambda} I - T^*)(\lambda I - T) \\ &= (\lambda I - T)^*(\lambda I - T).\end{aligned}$$

   Por lo tanto, $\lambda I - T$ es normal.

2. Sea $x \in H$, se tiene que

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle = \langle x, TT^*x\rangle = \langle T^*x, T^*x\rangle = \|T^*x\|^2.$$

   Por lo tanto $\|Tx\| = \|T^*x\|$ para todo $x \in H$.

3. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, por los literales anteriores, se tiene que $\lambda I - T$ es normal, por lo tanto para $x \in H$ se tiene que

$$\big\|(\lambda I - T)x\big\| = \big\|(\lambda I - T)^*x\big\| = \big\|(\overline{\lambda} I - T^*)x\big\|.$$

   De aquí es inmediato el resultado. □

Notación

Símbolo	**Descripción**
A^c	Complemento del conjunto A.
$A \setminus B$	Diferencia entre el conjunto A y el conjunto B.
$E^\times$	Conjunto de operadores lineales de E en sí mismo. Dual algebraico.
E^*	Espacio de todos los operadores lineales y continuos de E en sí mismo. Dual topológico.
$\mathcal{L}(E, F)$	Espacio de todos los operadores lineales y continuos de E en F.
$E_{\mathbb{R}}$	Proyección del espacio vectorial complejo, E, visto como un espacio vectorial real.
$\operatorname{int}(X)$	Interior del espacio topológico X.
$\overline{X}$	Clausura del espacio topológico X.
$B(x, r)$	Bola de centro x y radio r.
$B(r)$	Bola de centro 0 y radio r.
$\operatorname{span}(M)$	Conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de M.
$\operatorname{dom}(f)$	Dominio de la función f.
$\operatorname{img}(f)$	Imagen de la función f.
$\operatorname{graf}(T)$	Grafo de la aplicación lineal T.
$[\![m, n]\!]$	Intervalo de números enteros entre m y n.
$[a, b]$	Segmento cerrado entre a y b.
$]a, b[$	Segmento abierto entre a y b.
$\langle x, y \rangle$	Producto interno entre x y y.
$\\|x\\|$	Norma del vector x.
$x \perp y$	x es ortogonal a y.
$M^\perp$	Complemento ortogonal de M.
T^*	Operador adjunto de A en un espacio de Hilbert.
$T^\times$	Operador adjunto de A en un espacio de Banach.
T^n	Composición del operador T consigo mismo n veces.
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$	Sucesión de elementos en el espacio métrico X.
$x_n \to x$	La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x cuando n tiende a $+\infty$.

Símbolo	**Descripción**
$\lim x_n = x$	El límite de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cuando n tiende a $+\infty$, es x.
Tx	Imagen de x bajo el operador lineal T.
$\mathcal{C}(\Omega)$	Espacio de funciones continuas definidas sobre el conjunto Ω.
$\mathcal{C}^1(\Omega)$	Espacio de funciones con una derivada continua definidas sobre $\Omega \subseteq \mathbb{R}$.
$\mathscr{L}^p[a,b]$	Completación del espacio $\mathcal{C}[a,b]$ con la norma $\|u\| = \left(\int_a^b u(x)^p\,dx\right)^{1/p}$, para $1 \leq p < +\infty$.
$\ell^p(\mathbb{K})$	Espacio de sucesiones de elementos en $\mathbb{K}$ con la norma $\|u\| = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_i^p\right)^{1/p}$, para $1 \leq p < +\infty$.

Bibliografía

[1] H. Brézis. *Análisis funcional*. Alianza Editorial S.A., 1984.

[2] H. Brézis. *Functional analysis, Sobolev spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2010.

[3] G. Chirstol, A. Cot, y C. Marle. *Calcul différentiel*. Mathématiques pour le 2^{E} cycle. ellipses, 1997.

[4] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley, 1978.

[5] L. Todjuhounde. *Calcul différentiel: cours et exercise corrgés*. Cépaduès–éditions, 2004.

Índice alfabético

Análisis Matemático II

El presente fascículo recolecta las principales definiciones, proposiciones y teoremas, sobre los Operadores Adjuntos, vistos en el curso de "Análisis Matemático II", dictado en la carrera de Matemática de la Escuela Politécnica Nacional. Además, presenta un compendio de ejercicios propuestos y resueltos referente a este tema. Este trabajo se lo realizó en base a los apuntes de clase de la asignatura por el profesor Mat. Andrés Merino en la carrera de Matemática de la Escuela Politécnica Nacional, y recopilado por el estudiante Andrés Miniguano.

Cualquier corrección, propuesta de cambio o mejora del presente trabajo se la puede realizar al correo: `mat.andresmerino@gmail.com`.

Proyecto CLAVEMAT

ISBN 978-0000-000-00-2