Fascículos de Matemática
del Proyecto CLAVEMAT

4 (1)

Análisis Real
Resumen y Ejercicios Resueltos

1. Sucesiones y series de números reales

Proyecto CLAVEMAT

Fascículos de Matemática
del Proyecto CLAVEMAT

Proyecto CLAVEMAT

Análisis Real

Resumen y Ejercicios Resueltos

1. Sucesiones y series de números reales

Fascículo de Matemática No. 4 (1)

ANÁLISIS REAL: RESUMEN Y EJERCICIOS RESUELTOS
1. SUCESIONES Y SERIES DE NÚMEROS REALES

PROYECTO CLAVEMAT

Escrito por: Edison Tamayo, Ronny Tonato, Farhad Ghadiri
Responsable de la Edición: Andrés Merino
Revisión Académica: el texto aún no cuenta con revisión académica de pares

Registro de derecho autoral No.
ISBN: 978-0000-000-00

Publicado por el proyecto CLAVEMAT de la Escuela Politécnica Nacional, Ladrón de Guevara E11-253, Quito, Ecuador.

Primera edición: 2016
Primera impresión: 2016

Índice general

FASCÍCULO 1

SUCESIONES Y SERIES DE NÚMEROS REALES

1.1. Resumen

DEFINICIÓN 1.1 (Conjunto acotado superiormente)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, se dice que A es *acotado superiormente* si

$$(\exists a \in \mathbb{R})(\forall x \in A)(x \leq a),$$

es decir, si existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq a$ para todo $x \in A$. Al número a se lo llama una *cota superior* de A.

DEFINICIÓN 1.2 (Conjunto acotado inferiormente)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, se dice que A es *acotado superiormente* si

$$(\exists a \in \mathbb{R})(\forall x \in A)(a \leq x),$$

es decir, si existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in A$. Al número a se lo llama una *cota inferior* de A.

DEFINICIÓN 1.3 (Conjunto acotado)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, se dice que A es *acotado* si es acotado superiormente e inferiormente.

PROPOSICIÓN 1.1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, se tiene que A es acotada si y solo si

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in A)(|x| \leq M),$$

es decir, si y solo si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|x| \leq M$ para todo $x \in A$.

DEFINICIÓN 1.4 (Supremo). Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$, a se dice que es el *supremo* de A si es la menor de las cotas superiores; de manera equivalente, si cumple que

i) $(\forall x \in A)(x \leq a)$

ii) $(\forall x \in A)(x \leq c) \Longrightarrow a \leq c$.

Es decir, si cumple que $x \leq a$ para todo $x \in A$ y que si $x \leq c$ para todo $x \in A$, entonces $a \leq c$. Se representa por $\sup(A) = a$.

DEFINICIÓN 1.5 (Ínfimo). Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$, a se dice que es el *supremo* de A si es la mayor de las cotas inferiores; de manera equivalente, si cumple que

i) $(\forall x \in A)(a \leq x)$

ii) $(\forall x \in A)(c \leq x) \Longrightarrow c \leq a$.

Es decir, si cumple que $a \leq x$ para todo $x \in A$ y que si $c \leq x$ para todo $x \in A$, entonces $c \leq a$. Se representa por $\text{ínf}(A) = a$.

PROPOSICIÓN 1.2. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$, se tiene que $a = \sup(A)$ sí y solo sí

i) $(\forall x \in A)(x \leq a)$

ii) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists z \in A)(a - \varepsilon < z)$.

Es decir, si y solo si a es cota superior de A y para todo $\varepsilon > 0$, existe $z \in A$ tal que $a - \varepsilon < z$.

PROPOSICIÓN 1.3. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$, se tiene que $a = \text{ínf}(A)$ sí y solo sí

i) $(\forall x \in A)(a \leq x)$

ii) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists z \in A)(z < a + \varepsilon)$.

Es decir, si y solo si a es cota inferior de A y para todo $\varepsilon > 0$, existe $z \in A$ tal que $z < a + \varepsilon$.

PROPOSICIÓN 1.4. Si $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, entonces

$$\sup(A) \leq \sup(B) \qquad \text{y} \qquad \text{ínf}(B) \leq \text{ínf}(A).$$

PROPOSICIÓN 1.5. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, definimos al inverso de un conjunto como:

$$-A = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\} = \{-x \in \mathbb{R} : x \in A\}.$$

Entonces:

$$\text{ínf}(-A) = -\sup(A) \qquad \text{y} \qquad \sup(-A) = -\text{ínf}(A).$$

AXIOMA 1 (Axioma del Supremo)**.** Todo subconjunto de los números reales, acotado superiormente y no vacío, tiene supremo.

TEOREMA 1.6 (Propiedad Arquimediana)**.** Para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n$.

COROLARIO 1.7. Para todo $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que: $n \leq x < n + 1$.

TEOREMA 1.8 (Densidad)**.** Sean $x, y \in \mathbb{R}$ arbitrarios, si $x < y$, entonces

- existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q < y$; y
- existe $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.

1.1.1. Intervalos

DEFINICIÓN 1.6. A un conjunto $I \subseteq \mathbb{R}$ se lo llama *intervalo*, si para todo $x, y \in I$, con $x < y$; y para todo $z \in \mathbb{R}$ se tiene que si $x < z < y$, entonces $z \in I$.

DEFINICIÓN 1.7. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, se definen los conjuntos:

i) $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$,

ii) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$,

iii) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$,

iv) $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$,

v) $[b, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq b\}$,

vi) $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$,

vii) $(b, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > b\}$; y

viii) $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$.

Se clasifican en:

- intervalos *abiertos*: *i)*, *vii)* y *viii)*;
- intervalos *cerrados*: *ii)*, *v)* y *vi)*;
- intervalos *acotados*: *i)*, *ii)*, *iii)* y *iv)*; y
- intervalos *no acotados*: *v)*, *vi)*, *vii)* y *viii)*.

TEOREMA 1.9 (Intervalos encajados de Cantor)**.** Sea $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de intervalos, cerrados, acotados, no vacíos y encajados, es decir

$$I_{n+1} \subseteq I_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces tienen intersección no vacía:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \varnothing.$$

1.1.2. Sucesión

DEFINICIÓN 1.8 (Sucesión)**.** Una función $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se la llama una *sucesión* de números reales. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se denota $x_n = x(n)$ y a la sucesión se la denota $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

DEFINICIÓN 1.9 (Límite de una sucesión)**.** Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión y $L \in \mathbb{R}$, se dice que L es el *límite* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cuando n tiende al infinito, o que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* a L; y se escribe

$$L = \lim_{n\to+\infty} x_n, \qquad \text{o} \qquad x_n \to L, \text{ cuando } n \to +\infty,$$

si

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n > N \Longrightarrow |x_n - L| < \epsilon).$$

PROPOSICIÓN 1.10. El límite de una sucesión convergente es único.

PROPOSICIÓN 1.11. Dada una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- $|x_n - L| \to 0$, cuando $n \to \infty$, si y solo si $x_n \to L$, cuando $n \to \infty$.
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, si y solo si, $|x_n - x_m| \to 0$, cuando $n, m \to \infty$.

DEFINICIÓN 1.10. El conjunto

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es una sucesión en } \mathbb{R}\}$$

es un espacio vectorial.

DEFINICIÓN 1.11. Se define el conjunto

$$c = \{(x_n) : (x_n) \text{ converge}\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

PROPOSICIÓN 1.12. Se tiene que c es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

PROPOSICIÓN 1.13. La función

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} : \quad c &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_n) &\longmapsto \lim_{n\to+\infty} x_n \end{aligned}$$

es una aplicación lineal.

DEFINICIÓN 1.12 (Sucesión acotada)**.** Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es *acotada* si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto acotado, es decir, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$|x_n| \leq M,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

PROPOSICIÓN 1.14. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones. Si $x_n \to L$ y $y_n \to M$, cuando $n \to +\infty$, entonces

i) $x_n \cdot y_n \to L \cdot M$, cuando $n \to +\infty$; y

ii) si $x_n \neq 0$, para todo $n \in N$ y $L \neq 0$, entonces $\dfrac{1}{x_n} \to \dfrac{1}{L}$.

PROPOSICIÓN 1.15. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente, entonces es acotada.

PROPOSICIÓN 1.16. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente y $L \in \mathbb{N}$ su límite. Si $x_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $L \geq 0$.

COROLARIO 1.17. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones convergentes y $L, M \in \mathbb{R}$ sus límites respectivamente, si $x_n > y_n$,para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $L \geq M$.

TEOREMA 1.18 (Sánduche). Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones y $L \in \mathbb{R}$ tales que

- $x_n \to L$, $z_n \to L$; y
- $x_n \le y_n \le z_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

entonces $y_n \to L$.

PROPOSICIÓN 1.19. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión y $L \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \to L$, entonces $|x_n| \to |L|$.

PROPOSICIÓN 1.20. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión, entonces $x_n \to 0$, cuando $n \to +\infty$ si y solo si $|x_n| \to 0$, cuando $n \to +\infty$.

PROPOSICIÓN 1.21. Si $x_n \to L$, cuando $n \to +\infty$, $x_n > 0$, entonces $\sqrt{x_n} \to \sqrt{L}$, cuando $n \to +\infty$.

TEOREMA 1.22 (Axioma de Elección). Sea $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos no vacíos, entonces existe

$$f\colon \mathbb{N} \to \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i,$$

tal que $f(i) \in A_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$. En otras palabras, existe una sucesión, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$, con $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$, tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$x_n \in A_n \subseteq A.$$

PROPOSICIÓN 1.23. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona y acotada, entonces converge.

DEFINICIÓN 1.13 (Subsucesión). Sean $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión y $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente. A la aplicación

$$x \circ \phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R},$$

se le llama *subsucesión* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y se la nota por $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$.

PROPOSICIÓN 1.24. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente, entonces toda subsucesión de ésta sucesión también converge.

DEFINICIÓN 1.14. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión y $x \in \mathbb{R}$. A $x \in \mathbb{R}$ se lo llama *punto de acumulación* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si existe una subsucesión $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a x.

PROPOSICIÓN 1.25. Toda sucesión acotada posee una subsucesión monótona.

TEOREMA 1.26 (Bolzano Weierstrass)**.** Toda sucesión acotada posee una subsucesión convergente.

1.1.3. Sucesiones de Cauchy

DEFINICIÓN 1.15 (Sucesión de Cauchy)**.** Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión, se dice de *Cauchy* si,

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n, m > N \Rightarrow |x_n - x_m| < \epsilon).$$

PROPOSICIÓN 1.27. Toda sucesión convergente es de Cauchy.

PROPOSICIÓN 1.28. Toda sucesión de Cauchy es acotada.

PROPOSICIÓN 1.29. Si una sucesión de Cauchy posee una subsucesión convergente entonces converge.

TEOREMA 1.30. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, entonces es convergente.

1.1.4. Series

DEFINICIÓN 1.16. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión, se define:

$$\begin{aligned} s_0 &= x_0; y \\ s_n &= s_{n-1} + x_n \quad n > 1, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. A la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se la llama la serie de término general x_n y se la representa por:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n \qquad \text{o} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n.$$

Si $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L. Se dice que la serie es convergente y se nota:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = L.$$

Observación. Si $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ converge, entonces:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{m=0}^{n} x_m = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n.$$

Proposición 1.31. Sean $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ series de términos positivos; si ambas convergen hacia a y b respectivamente, y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

- $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)$ converge, además
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = a + b; y$$

- $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha \cdot x_n$ converge, además
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha \cdot x_n = \alpha \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} x_n.$$

Proposición 1.32. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.

Proposición 1.33. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n$ converge si $|r| < 1$, y además, su límite es

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

Proposición 1.34 (Criterio del límite del término general)**.** Si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Proposición 1.35 (Criterio de comparación)**.** Sean $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ series de términos positivos. Si existen $c \in \mathbb{R}$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que

$$a_n < c \cdot b_n,$$

para todo $n > N$, entonces

- si $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ también converge; y
- si $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ no converge, entonces $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ tampoco converge.

DEFINICIÓN 1.17 (Convergencia absoluta)**.** Dada $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, se dice que converge absolutamente, si la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge. Si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge pero $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ no converge, entonces se dice que la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge condicionalmente.

PROPOSICIÓN 1.36 (Series alternantes)**.** Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente y convergente a cero, entonces la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1^n) \cdot a_n,$$

es convergente.

PROPOSICIÓN 1.37. Sea $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ absolutamente convergente, entonces $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.

PROPOSICIÓN 1.38 (Criterio de d'Alambert)**.** Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de términos distintos de cero. Si $\lim_{n\to +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$, entonces

- si $L < 1$, entonces $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ es absolutamente convergente.
- si $L > 1$, entonces $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ no es absolutamente convergente.

Definición 1.18. Sean $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie y $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función biyectiva. Una reordenación de la serie es la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\phi(n)}.$$

Proposición 1.39. Si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge absolutamente, toda reordenación converge al mismo límite.

Proposición 1.40. Sea $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie condicionalmente convergente. Para todo $c \in \mathbb{R}$ existe un reordenamiento tal que:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\phi(n)} = c.$$

1.2. Ejercicios resueltos

EJERCICIO 1.1. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x\}$. Demuestre que A tiene cota inferior pero no superior.

Demostración. Primero demostremos que A tiene cota inferior, es decir, demostremos que:

$$(\exists a \in \mathbb{R})(\forall x \in A)(a \leq x).$$

Sea $x \in A$, por lo tanto, se tiene que $0 \leq x$. Así, se tiene que 0 es una cota inferior de A.

Ahora, demostremos que A no es acotada superiormente, por reducción al absurdo, supongamos que existe $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$(\forall x \in A)(x \leq b).$$

Como $0 \in A$, se tiene que $0 \leq b$. Por otro lado, $b < b+1$, por lo tanto, $0 \leq b+1$, de donde, se obtiene que $b+1 \in A$. Así, se tiene que $b+1 \leq b$, lo cual es contradictorio, por lo tanto, A no es acotado superiormente. □

EJERCICIO 1.2. Halle el supremo e ínfimo del conjunto $(0,1]$.

Solución. Definamos $A = (0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$. Demostraremos que $\sup(A) = 1$.

- Sea $x \in A$, por definición de A

$$x \leq 1.$$

- Supongamos que $c \in \mathbb{R}$ es tal que

$$(\forall x \in A)(x \leq c),$$

  como $1 \in A$, se tiene que $1 \leq c$.

Así, se tiene que en efecto $\sup(A) = 1$.

Ahora, demostraremos que $\inf(A) = 0$.

- Sea $x \in A$, por definición de A se tiene que $0 < x$, de donde,

$$0 \leq x.$$

- Supongamos que $c \in \mathbb{R}$ es tal que

  $$(\forall x \in A)(c \leq x),$$

  queremos demostrar que $c \leq 0$. Por reducción al absurdo, supongamos que $c > 0$, tomando $x = \min\{1, c/2\}$, se tiene que $x \in A$, por lo tanto $x \leq c$, de donde

  $$c \leq \frac{c}{2},$$

  es decir $1 \leq \frac{1}{2}$, lo cual es contradictorio, por lo tanto, $c \leq 0$.

Así, se tiene que en efecto $\inf(A) = 0$. □

> **EJERCICIO 1.3.** Demuestre que $\inf\left(\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}\right) = 0$.

Demostración. Para esta demostración, utilizaremos la Proposición 1.2.

- Sea $n \in \mathbb{N}^*$, entonces $n > 0$, por lo tanto, $\frac{1}{n} > 0$.

- Ahora, debemos demostrar que cumple

  $$(\forall \epsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N}^*)\left(\frac{1}{n} < 0 + \epsilon\right).$$

  Sea $\epsilon > 0$, gracias a la Propiedad Arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\epsilon} < n$, así,

  $$\frac{1}{n} < \epsilon.$$

Por lo tanto, gracias a la Proposición 1.2, se tiene que $\inf\left(\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}\right) = 0$. □

> **EJERCICIO 1.4.** Halle el supremo de $A = \left\{1 - \frac{1}{2n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

Solución. Demostraremos que $\sup(A) = 1$. Es decir, demostraremos que

- $(\forall n \in \mathbb{N})\left(1 - \frac{1}{2n+1} \leq 1\right)$; y

- si $(\forall n \in \mathbb{N})\left(1 - \frac{1}{2n+1} \leq c\right)$, entonces $1 \leq c$.

Sea $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned} 2n+1>0 &\Longrightarrow \frac{1}{2n+1}>0 \\ &\Longrightarrow -\frac{1}{2n+1}<0 \\ &\Longrightarrow 1-\frac{1}{2n+1}<1, \end{aligned}$$

es decir, 1 es una cota superior del conjunto.

Ahora, supongamos que $c \in \mathbb{R}$ es tal que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left(1 - \tfrac{1}{2n+1} \leq c\right),$$

debemos demostrar que $1 \leq c$. Por reducción al absurdo, supongamos que $c < 1$, gracias a la Propiedad Arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{1-c} < n,$$

lo cual equivale a

$$c < 1 - \frac{1}{2n+1}.$$

Pero, dado que c es una cota superior del conjunto, se tiene que

$$1 - \frac{1}{2n+1} \leq c,$$

lo cual es contradictorio, por lo tanto, $1 \leq c$. Es decir, en efecto, $\sup(A) = 1$. $\square$

EJERCICIO 1.5. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto acotado. Demuestre que

$$\sup(-A) = -\operatorname{ínf}(A).$$

Demostración. Sea $\alpha = \operatorname{ínf}(A)$, por la Proposición 1.2, se tiene que

i) $(\forall x \in A)(\alpha \leq x)$; y

ii) $(\forall \epsilon > 0)(\exists y \in A)(y < \alpha + \epsilon)$.

Demostraremos que $-\alpha = \sup(-A)$ utilizando la Proposición 1.2, es decir, demostraremos que

- $(\forall x \in -A)(x \leq -\alpha)$; y

- $(\forall \epsilon > 0)(\exists z \in -A)(-\alpha - \epsilon < z)$.

Sea $x \in -A$, se tiene que $-x \in A$. Por *i)*, tenemos que $\alpha \leq -x$ es decir

$$x \leq -\alpha.$$

Ahora, sea $\epsilon > 0$. Por *b)*, existe $y \in A$ tal que

$$y < \alpha + \epsilon,$$

por lo tanto,

$$-\alpha - \epsilon < -y,$$

pero $-y$ es elemento de $-A$, de donde, tomando $z = -y$ se tienen que $z \in -A$ y que

$$-\alpha - \epsilon < z,$$

por lo tanto, $-\alpha = \sup(-A)$. □

Ejercicio 1.6. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Se define el conjunto

$$\lambda A = \{\lambda x \in \mathbb{R} : x \in A\},$$

demostrar que

a) si $\lambda > 0$, entonces $\sup(\lambda A) = \lambda \cdot \sup(A)$; y

b) si $\lambda < 0$, entonces $\sup(\lambda A) = \lambda \cdot \inf(A)$.

Demostración. Sean $\alpha = \sup(\lambda A)$, $\beta = \sup(A)$ y $\gamma = \inf(A)$.

a) Supongamos que $\lambda > 0$, debemos demostrar que $\alpha = \lambda \cdot \beta$. Por la definición de supremos se tiene que

  i) $(\forall x \in A)(\lambda x \leq \alpha)$;

  ii) si $(\forall x \in A)(\lambda x \leq c)$, entonces $\alpha \leq c$;

  iii) $(\forall x \in A)(x \leq \beta)$; y

  iv) si $(\forall x \in A)(x \leq d)$, entonces $\beta \leq d$.

  Empecemos demostrando que $\lambda\beta \leq \alpha$. Sea $x \in A$, por *i)*, se tiene que $\lambda x \leq \alpha$, es decir

$$x \leq \frac{\alpha}{\lambda}.$$

Con esto, por *iv)*, obtenemos que $\beta \leq \frac{\alpha}{\lambda}$, de donde

$$\lambda\beta \leq \alpha.$$

Ahora demostremos que $\alpha \leq \lambda\beta$. Sea $x \in A$, por *iii)*, se tiene que $x \leq \beta$, por lo tanto

$$\lambda x \leq \lambda\beta.$$

Con esto, por *ii)* se obtiene que $\alpha \leq \lambda\beta$. Por lo tanto, se obtiene que $\alpha = \lambda\beta$, es decir,

$$\sup(\lambda A) = \lambda \cdot \sup(A).$$

b) Supongamos que $\lambda < 0$, debemos demostrar que $\alpha = \lambda \cdot \gamma$. Así, se tienen las siguientes propiedades:

i) $(\forall x \in A)(\lambda x \leq \alpha)$;

ii) si $(\forall x \in A)(\lambda x \leq c)$, entonces $\alpha \leq c$;

iii) $(\forall y \in A)(\gamma \leq y)$; y

iv) si $(\forall y \in A)(d \leq y)$, entonces $d \leq \gamma$.

Empecemos demostrando que $\alpha \geq \lambda\gamma$. Sea $x \in A$, por *i)*, se tiene que $\lambda x \leq \alpha$, es decir

$$x \geq \frac{\alpha}{\lambda}.$$

Con esto, por *iv)*, obtenemos $\frac{\alpha}{\lambda} \leq \gamma$, de donde

$$\alpha \geq \lambda\gamma.$$

Ahora demostremos que $\alpha \leq \lambda\gamma$. Sea $x \in A$, por *iii)*, se tiene que $x \geq \gamma$, por lo tanto

$$\lambda x \leq \lambda\gamma,$$

Con esto, por *ii)* se obtiene que $\alpha \leq \lambda\gamma$. Por lo tanto, se obtiene que $\alpha = \lambda\gamma$, es decir,

$$\sup(\lambda A) = \lambda \cdot \text{ínf}(A). \qquad \square$$

EJERCICIO 1.7. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Demuestre que existe una cantidad infinita de números racionales en el intervalo (a, b).

Demostración. Definamos el conjunto

$$Q = \{q \in \mathbb{Q} : a < q < b\}.$$

Supongamos, por reducción al absurdo, que Q es finito, por lo tanto existe $\max(Q)$, llamémoslo r. Se tiene que $r \in \mathbb{Q}$, además, $a < r < b$. Por densidad en $\mathbb{R}$, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que

$$a < r < q < b,$$

entonces $q \in Q$. Al ser r el máximo se tiene que $q \leq r$, lo cual es contradictorio. Por lo tanto, Q es infinito, es decir, existe una cantidad infinita de números racionales en el intervalo (a, b). □

> **EJERCICIO 1.8.** Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestre que $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$.

Demostración. Usando la desigualdad triangular tenemos que

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b| \qquad \text{y} \qquad |b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a|.$$

Así, tenemos que

$$|a| - |b| \leq |a - b| \qquad \text{y} \qquad |b| - |a| \leq |a - b|,$$

por lo tanto

$$-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|,$$

de donde, se concluye que $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$. □

> **EJERCICIO 1.9.** Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión. Demuestre que si $x_n \to a$ cuando $n \to \infty$, entonces $|x_n| \to |a|$ cuando $n \to \infty$

Demostración. Supongamos que $x_n \to a$ cuando $n \to \infty$, es decir, supongamos que

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n > N \Longrightarrow |x_n - a| < \epsilon).$$

Queremos demostrar que $|x_n| \to |a|$ cuando $n \to \infty$,es decir,

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n > N \Longrightarrow \big||x_n| - |a|\big| < \epsilon).$$

Sea $\epsilon > 0$, por hipótesis, para $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\big||x_n| - |a|\big| < |x_n - a|.$$

Así, para $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces

$$\big||x_n| - |a|\big| < |x_n - a| < \epsilon.$$

Es decir, $|x_n| \to |a|$, cuando $n \to +\infty$. □

EJERCICIO 1.10. Demuestre que $\dfrac{\cos(\sqrt{n})}{n^2} \to 0$ cuando $n \to \infty$

Demostración. Sabemos que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{-1}{n^2} \leq \frac{\cos(\sqrt{n})}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Ahora, dado que

$$\frac{-1}{n^2} \to 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{n^2} \to 0$$

cuando $n \to +\infty$, entonces, por el Teorema del Sánduche, se concluye que

$$\frac{\cos(\sqrt{n})}{n^2} \to 0$$

cuando $n \to +\infty$. □

EJERCICIO 1.11. Demuestre que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$x_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

para $n \in \mathbb{N}^*$ es convergente.

Demostración. En primer lugar, notemos que, para $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
x_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \cdots + \frac{1}{2n} \\
&\leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot (2n - n - 1 + 1) \\
&= \frac{n}{n+1} < 1.
\end{aligned}$$

de lo cual se sigue que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada. Por otro lado, tenemos que

$$x_n - x_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n+1} - \sum_{k=2n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&= -\frac{1}{2(n+1)(2n+1)} < 0,
\end{aligned}
$$

de lo cual se sigue que

$$x_n < x_{n+1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$; es decir, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona. Así por la Proposición 1.23 se concluye que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. □

> **EJERCICIO 1.12.** Demostrar, si $x_n \to x, y_n \to y$, cuando $n \to +\infty$, entonces $|x_n - y_n| \to |x - y|$, cuando $n \to +\infty$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, para $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\big||x_n - y_n| - |x - y|\big| &\leq |(x_n - y_n) - (x - y)| \\
&\leq |(x_n - x) - (y_n - y)| \\
&\leq |x_n - x| + |y_n - y|.
\end{aligned}
$$

Para $\frac{\epsilon}{2} > 0$, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N_1 \Longrightarrow |x_n - x| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad n \geq N_2 \Longrightarrow |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Con esto, tomando $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, se sigue que

$$n \geq N \Longrightarrow \big||x_n - y_n| - |x - y|\big| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$ □

> **EJERCICIO 1.13.** Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, y $s = \sup A$. Demostrar que existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A tal que $x_n \to s$ cuando $n \to \infty$

Demostración. Si $s \in A$, podemos tomar la sucesión dado por $x_n = s$, para todo $n \in \mathbb{N}$, asi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión constante y converge a s.

Por otro lado, supongamos que $s \notin A$, como s es el supremo de A, se cumple que

i) $(\forall x \in A)(x \leq s)$; y

ii) $(\forall \epsilon > 0)(\exists y \in A)(s - \epsilon < y)$.

Para $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n+1} > 0$. Por *ii)*, existe $y \in A$ tal que

$$s - \frac{1}{n+1} < y,$$

es decir

$$A_n = \left\{ y \in A : s - \frac{1}{n} < y \right\} \neq \emptyset.$$

Así, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos no vacíos. Por el Axioma de Elección, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de A tal que

$$x_n \in A_n \subseteq A,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, además, como s es el supremo de A y $x_n \in A_n \subseteq A$, para todo $n \in \mathbb{N}$, se obtiene

$$s - \frac{1}{n+1} < x_n \leq s,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Aplicando el Teorema del Sanduche, se tiene

$$x_n \to s,$$

cuando $n \to +\infty$. □

EJERCICIO 1.14. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de números reales. Se definen las sucesiones $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por

$$s_n = \sup\{x_k : k \geq n\} \quad \text{y} \quad i_n = \inf\{x_k : k \geq n\},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que estas sucesiones convergen y especificar su valor. A estos se los conoce como *límite superior* y *límite inferior*, respectivamente, notándolos por

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \quad \text{y} \quad \liminf_{n\to\infty} x_n.$$

Demostrar finalmente que $\limsup_{n\to\infty} x_n \leq \liminf_{n\to\infty} x_n$.

Demostración. Definamos, para $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $S_n = \{x_k : k \geq n\}$, se tiene que $s_n = \sup(S_n)$. Por otro lado, para $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$S_{n+1} = \{x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots\} \subseteq \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots\} = S_n,$$

por lo tanto,

$$s_{n+1} = \sup(S_{n+1}) \leq \sup(S_n) = s_n$$

para $n \in \mathbb{N}$, es decir, la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente. Además, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, se tiene que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, pues

$$\operatorname{ínf}(S_0) \leq s_n \leq \sup S_0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora, como $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona y acotada, por la Proposición 1.23, se tiene que es convergente, además, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} s_n.$$

Procediendo de manera análoga, se tiene que $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y acotada, por lo tanto, también es convergente. Además,

$$\lim_{n\to\infty} i_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n.$$

Finalmente, dado que, para $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$i_n \leq x_n \leq s_n,$$

entonces

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} i_n \leq \lim_{n\to\infty} s_n = \limsup_{n\to\infty} x_n. \qquad \square$$

EJERCICIO 1.15. Demostrar, por la definición, que la sucesión $\left(\frac{n^2+n}{n^2+3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, para $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n^2+n}{n^2+3} - \frac{m^2+m}{m^2+3}\right| &= \left|\frac{n^2+n}{n^2+3} - \frac{m^2+m}{m^2+3}\right| \\
&= \left|1 + \frac{n^2+n}{n^2+3} - 1 - \frac{m^2+m}{m^2+3}\right| \\
&= \left|\frac{n-3}{n^2+3} - \frac{m-3}{m^2+3}\right| \\
&\leq \left|\frac{n-3}{n^2+3}\right| + \left|\frac{m-3}{m^2+3}\right|
\end{aligned}$$

Para $n, m > 3$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n^2+n}{n^2+3} - \frac{m^2+m}{m^2+3}\right| &\leq \left|\frac{n-3}{n^2+3}\right| + \left|\frac{m-3}{m^2+3}\right| \\
&= \frac{n-3}{n^2+3} + \frac{m-3}{m^2+3} \\
&\leq \frac{n}{n^2} + \frac{m}{m^2} \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.
\end{aligned}$$

Utilizando la Propiedad Arquimediana para $\frac{2}{\epsilon}$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{2}{\epsilon} < M,$$

Tomando $N = \text{máx}\{3, M\}$, se cumple, pues si $n, m > N$, entonces

$$\frac{2}{\epsilon} < m \qquad \text{y} \qquad \frac{2}{\epsilon} < n,$$

por lo tanto

$$\left|\frac{n^2+n}{n^2+3} - \frac{m^2+m}{m^2+3}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \qquad \square$$

EJERCICIO 1.16. Toda sucesión de Cauchy es acotada.

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ debemos demostrar que es acotada, es decir que existe un $M > 0$ tal que $|x_n| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, entonces

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n, m > N \Longrightarrow |x_n - x_m| < \epsilon)$$

Para $\epsilon = 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m > N \Longrightarrow |x_n - x_m| < 1$$

Ahora, se tiene que, si $n > N$, entonces

$$|x_n| - |x_{N+1}| \leq |x_n - x_{N+1}| < 1,$$

por lo tanto,

$$|x_n| < 1 + |x_{N+1}|.$$

Así, tomando $M = \text{máx}\{|x_0|, |x_1|, \ldots, |x_N|, 1 + |x_{N+1}|\}$, se tiene que

$$|x_n| \leq M$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

EJERCICIO 1.17. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de Cauchy.

a) Demuestre que la sucesión $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también es de Cauchy.

b) Demuestre que la sucesión $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también es de Cauchy.

Demostración.

a) Empecemos demostrando que

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists N \in N)(n, m > N \Rightarrow |(x_n + y_n) - (x_m + y_m)| < \epsilon).$$

Sea $\epsilon > 0$; para $n, m \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (x_m + y_m)| &= |(x_n - x_m) + (y_n - y_m)| \\ &\leq |x_n - x_m| + |y_n - y_m|. \end{aligned}$$

Ahora, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de Cauchy, se tiene que para $\frac{\epsilon}{2} > 0$, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m > N_1 \Longrightarrow |x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad n, m > N_2 \Longrightarrow |y_n - y_m| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Tomando $N = \text{máx}(N_1, N_2)$, para $n, m > N$ se sigue que:

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (x_m + y_m)| &\leq |x_n - x_m| + |y_n - y_m| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

De lo cual, se concluye que $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

b) Ahora demostremos que

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists N \in N)(n, m > N \Rightarrow |x_n y_n - x_m y_m| < \epsilon).$$

Sea $\epsilon > 0$; para $n, m \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$|x_n y_n - x_m y_m| = |x_n y_n + x_n y_m - x_n y_m + x_m y_m)|$$

$$\begin{aligned}
&= |(x_n y_n - x_n y_m) + (x_n y_m - x_m - y_m)| \\
&\leq |x_n y_n - x_n y_m| + |x_n y_m - x_m - y_m| \\
&= |x_n||y_n - y_m| + |y_m||x_n - x_m|.
\end{aligned}$$

Luego, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de Cauchy, entonces están acotadas, es decir, existen $M, L > 0$ tal que

$$|x_k| \leq L \qquad \text{y} \qquad |y_k| \leq M$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto se tiene que

$$|x_n y_n - x_m y_m| \leq L|y_n - y_m| + M|x_n - x_m|.$$

Para $\dfrac{\epsilon}{2M} > 0$ y $\dfrac{\epsilon}{2L} > 0$, existen $N_3, N_4 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m > N_3 \implies |x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2M} \qquad \text{y} \qquad n, m > N_4 \implies |y_n - y_m| < \frac{\epsilon}{2L}.$$

Finalmente, tomando $N = \max(N_3, N_4)$, para $n, m > N$, se sigue que

$$\begin{aligned}
|x_n y_n - x_m y_m| &\leq L|y_n - y_m| + M|x_n - x_m| \\
&< M\left(\frac{\epsilon}{2M}\right) + L\left(\frac{\epsilon}{2L}\right) = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Así, $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. □

EJERCICIO 1.18. Sea $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie de términos no negativos. Demuestre que la convergencia de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ implica la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}.$$

Demostración. Como $\left(\sqrt{a_n} - \dfrac{1}{n}\right)^2 \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, se sigue que

$$\frac{\sqrt{a_n}}{n} \leq \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{n^2}\right). \tag{1.1}$$

Luego, por hipótesis se conoce que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge y además, por la Proposición 1.32 se tiene que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ también converge. Así, por el criterio de comparación aplicado en (1.1), se sigue que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ converge. $\square$

EJERCICIO 1.19. Sea $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie convergente tal que $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2$ converge.

Demostración. Como $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, entonces para un n suficientemente grande se tiene que $a_n < 1$, por lo tanto

$$a_n^2 < a_n.$$

Luego, por el criterio de comparación se sigue que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2$ converge. $\square$

EJERCICIO 1.20. Sean $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie y $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$, la serie en la cual los términos son los mismos y en el mismo orden que en $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, excepto que los términos para los cuales $a_n = 0$ han sido omitidos. Pruebe que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge a L si y sólo si $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge a L.

Demostración. Dado que los términos para los que $a_n = 0$ han sido omitidos, la sucesión de sumas iniciales, $\left(\sum_{n=0}^{k} b_n\right)_{k\in\mathbb{N}}$, es una subsucesión de $\left(\sum_{n=0}^{k} a_n\right)_{k\in\mathbb{N}}$. Por lo tanto si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge a L, entonces $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge a L.

Recíprocamente, si $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge a L, se tiene que:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N}) \left(n > N \Rightarrow \left| \sum_{k=0}^{n} b_k - L \right| < \epsilon \right).$$

Sea $\epsilon > 0$, entonces existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N_1$ se tiene que:

$$\left|\sum_{k=0}^{n} b_k - L\right| < \epsilon.$$

De acuerdo a la definición de los términos de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ se tiene que existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\sum_{k=0}^{N_1} b_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{N_2} a_k\right|$$

Tomando $N = N_2$ se tiene que si $n > N$, entonces existe un $n' \in \mathbb{N}$, tal que

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - L\right| = \left|\sum_{k=0}^{n'} b_k - L\right|,$$

además $n' > N_1$, por lo tanto

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - L\right| = \left|\sum_{k=0}^{n'} b_k - L\right| < \epsilon,$$

de lo cual se sigue que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge a L. □

EJERCICIO 1.21. ¿Puede existir un ejemplo de una serie convergente $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$, y una serie divergente $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ tal que $\sum_{n=0}^{+\infty} (x_n + y_n)$ sea convergente? Explique.

Demostración. Supongamos que $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$, y $\sum_{n=0}^{+\infty} (x_n + y_n)$ convergen pero $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ no converge, entonces por la Proposición 1.31 se sigue que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} y_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (x_n + y_n) - \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$$

es convergente, lo que contradice el supuesto de que $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ no converge. Así no existen una serie convergente $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$, y una serie divergente $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ tal que

$\sum_{n=0}^{+\infty}(x_n + y_n)$ sea convergente. $\square$

Análisis Real

El presente fascículo recolecta las principales definiciones, proposiciones y teoremas sobre Sucesiones y series de números reales, vistos en el curso de Análisis Real, dictado en la carrera de Matemática de la Escuela Politécnica Nacional. Además, presenta un compendio de ejercicios resueltos referentes a este tema, los cuales han sido desarrollados por Edison Tamayo, Ronny Tonato y Farhad Ghadiri estudiantes de la Facultad de Ciencias, bajo la supervisión de Andrés Merino, profesor del Departamento de Matemática, quien ha dictado dicha asignatura.
Cualquier corrección, propuesta de cambio o mejora del presente trabajo se la puede realizar al correo: `mat.andresmerino@gmail.com`.

Proyecto CLAVEMAT

ISBN 978-0000-000-00-2

9 780000 000002 >