PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL ECUADOR

CÁLCULO DIFERENCIAL • TALLER NO. 1

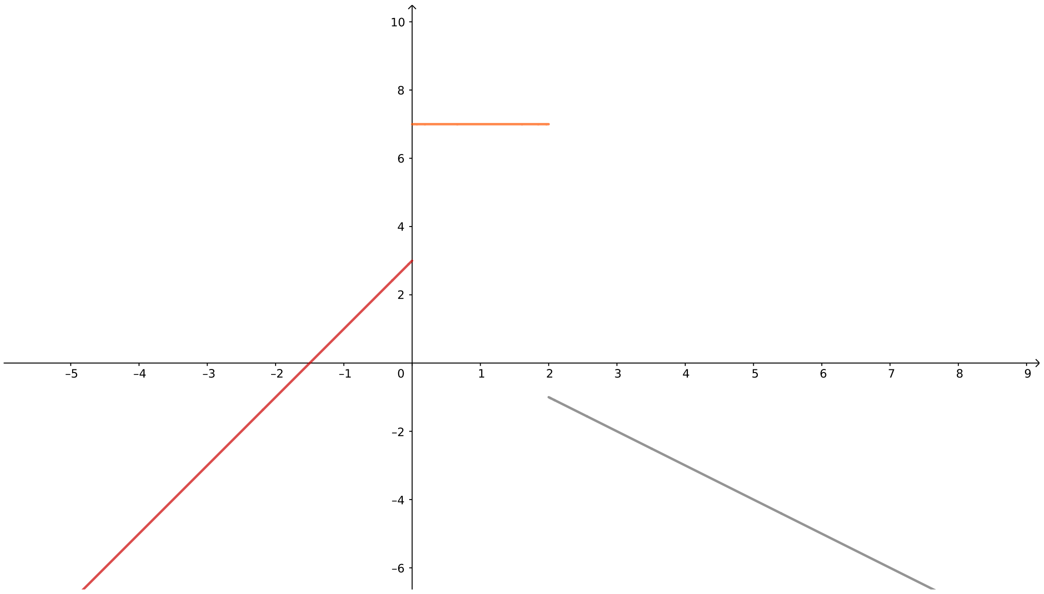
17 de abril de 2018 *Mat. Andrés Merino*

1. Dada la función

$$
\begin{aligned}
f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\
x &\longmapsto f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x \le 0,\\ 7 & \text{si } 0 < x \le 2,\\ 1-x & \text{si } 2 < x, \end{cases}
\end{aligned}
$$

graficarla y hallar su imagen.

Solución. Tenemos entonces que la gráfica de la función es la siguiente



Así, la imagen es $\operatorname{img}(f) =]-\infty, 3[\cup \{7\}$. □

2. Dada la función $f\colon I \to \mathbb{R}$, calcular

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

para $h \neq 0$.

   a) $f(x) = 2x+5$

   b) $f(x) = \frac{1}{x}$

Solución. *a*) Tenemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(2(x+h)+5)-(2x+5)}{h}\\
&= \frac{2x+2h+5-2x-5}{h}\\
&= \frac{2h}{h}\\
&= 2.
\end{aligned}
$$

b) Tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}\\ &= \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}\\ &= \frac{-\frac{h}{x(x+h)}}{h}\\ &= -\frac{h}{hx(x+h)}\\ &= -\frac{1}{x(x+h)}.\end{aligned}$$

$\square$

3. Determinar el dominio natural de la ley de asignación

$$f(x)=\frac{\sqrt{3-2x}}{x^2+3x-3}.$$

Solución. Tenemos restricciones:

$$3-2x\geq 0 \qquad \text{y} \qquad x^2+3x-3\neq 0$$

lo que equivale a

$$x\leq\frac{3}{2} \qquad \text{y} \qquad x\neq\frac{-2\pm\sqrt{21}}{2}$$

Entonces

$$\operatorname{dom}(f)=\left]-\infty,\frac{3}{2}\right]\setminus\left\{\frac{-3+\sqrt{21}}{2},\frac{-3-\sqrt{21}}{2}\right\}.$$

$\square$

4. Dadas las funciones

$$\begin{aligned} f\colon [2,5] &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto f(x)=2x+1\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g\colon [-4,7] &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto g(x)=x^2-1\,'\end{aligned}$$

determinar $f\circ g$ y $g\circ f$.

Solución.

- Para $f\circ g$: primero calculamos el dominio de $f\circ g$, así, si $x\in\operatorname{dom}(f\circ g)$, tenemos que:

$$x\in\operatorname{dom}(g) \qquad \text{y} \qquad g(x)\in\operatorname{dom}(f).$$

Ahora, si $x\in\operatorname{dom}(g)$ entonces $x\in[-4,7]$. Por otra parte, notemos que

$$\begin{aligned} g(x)\in\operatorname{dom}(f) &\iff x^2-1\in[2,5]\\ &\iff 2\leq x^2-1\leq 5\end{aligned}$$

Por un lado tenemos que

$$\begin{aligned} 2\leq x^2-1 &\iff x^2-3\geq 0\\ &\iff (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})\geq 0\end{aligned}$$

$$\iff x \in]-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty[,$$

por otro lado,

$$\begin{aligned} x^2 - 1 \leq 5 &\iff x^2 - 6 \leq 0 \\ &\iff (x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6}) \leq 0 \\ &\iff x \in [-\sqrt{6}, \sqrt{6}]. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$x \in (]-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty[) \cap ([-\sqrt{6}, \sqrt{6}]) = [-\sqrt{6}, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \sqrt{6}].$$

Así, tenemos que

$$\operatorname{dom}(f \circ g) = \left([-\sqrt{6}, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \sqrt{6}]\right) \cap [-4, 7] = [-\sqrt{6}, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \sqrt{6}].$$

Finalmente, calculemos ley de asignación para $f \circ g$. Tenemos que

$$(f \circ g)(x) = 2(x^2 - 1) + 1.$$

- Para $g \circ f$: Primero calculamos el dominio de $g \circ f$, así, si $x \in \operatorname{dom}(g \circ f)$, tenemos que:

$$x \in \operatorname{dom}(f) \qquad \text{y} \qquad f(x) \in \operatorname{dom}(g).$$

Ahora, si $x \in \operatorname{dom}(f)$, entonces $x \in [2, 5]$. Por otra parte, notemos que

$$\begin{aligned} f(x) \in \operatorname{dom}(g) &\iff 2x + 1 \in [-4, 7] \\ &\iff x \in \left[-\frac{5}{2}, 3\right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$x \in \left[-\frac{5}{2}, 3\right] \cap [2, 5] = [2, 3].$$

Así, tenemos que

$$\operatorname{dom}(g \circ f) = [2, 3].$$

Finalmente, calculemos la ley de asignación para $g \circ f$. Tenemos que

$$(g \circ f)(x) = (2x + 1)^2 - 1.$$

$\square$

$\aleph_0$

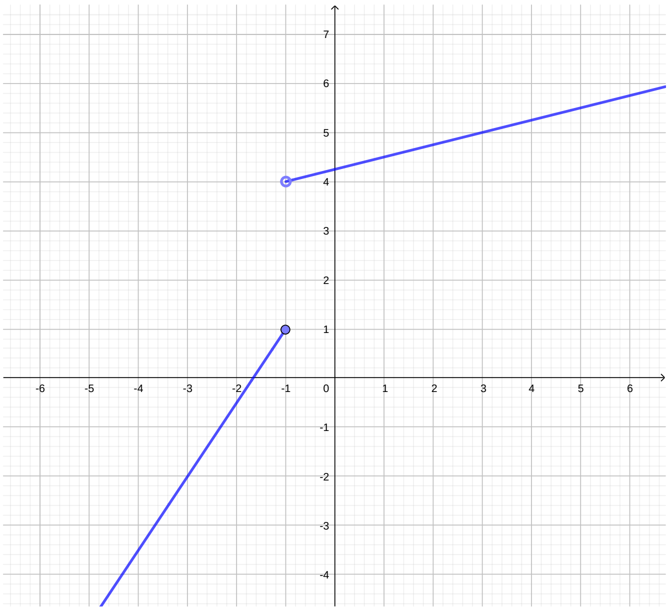
02 de mayo de 2018 *Mat. Andrés Merino*

1. Dada la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \begin{cases} \frac{3x+5}{2} & \text{si } x \leq -1, \\ \frac{x+17}{4} & \text{si } x > -1. \end{cases} \end{aligned}$$

   Graficarla. ¿Es inyectiva? ¿Es sobreyectiva?

Solución. Tenemos que la gráfica de la función es la siguiente:



Así, la función es inyectiva. Por otra parte, tenemos que $\operatorname{img}(f) = (-\infty, 1] \cup (4, +\infty)$, por lo tanto, ya que $\operatorname{img}(f) \neq \mathbb{R}$, la función no es sobreyectiva. □

2. Dada la función

$$\begin{aligned} f\colon I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = 1 - x^2, \end{aligned}$$

   calcular

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

   para $h \neq 0$.

Solución. Se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(1-(x+h)^2) - (1-x^2)}{h} \\ &= \frac{1 - (x^2 + 2xh + h^2) - 1 + x^2}{h} \\ &= \frac{1 - x^2 - 2xh - h^2 - 1 + x^2}{h} \\ &= \frac{-2xh - h^2}{h} \\ &= -2x - h. \end{aligned}$$

□

3. Determinar el dominio natural de la ley de asignación

$$f(x) = \frac{1}{1-\sqrt{2x+1}}.$$

Solución. Tenemos restricciones

$$1-\sqrt{2x+1} \neq 0 \qquad \text{y} \qquad 2x+1 \geq 0,$$

lo que equivale a

$$x \neq 0 \qquad \text{y} \qquad x \geq -\frac{1}{2}.$$

Entonces

$$\operatorname{dom}(f) = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) \smallsetminus \{0\}.$$

□

4. Dadas las funciones

$$\begin{aligned} f\colon [-1,3] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = 2x-1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g\colon (-\infty,3) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = 1-2x, \end{aligned}$$

determinar $f \circ g$ y $g \circ f$.

Solución.

- Para $f \circ g$: primero calculamos el dominio de $f \circ g$, así, si $x \in \operatorname{dom}(f \circ g)$, tenemos que:

  $$x \in \operatorname{dom}(g) \qquad \text{y} \qquad g(x) \in \operatorname{dom}(f).$$

  Ahora, si $x \in \operatorname{dom}(g)$ entonces $x \in (-\infty, 3)$. Por otra parte, notemos que

  $$\begin{aligned} g(x) \in \operatorname{dom}(f) &\iff 1-2x \in [-1,3] \\ &\iff -1 \leq 1-2x \leq 3 \\ &\iff -1 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

  Por lo tanto

  $$x \in [-1,1]$$

  Así, tenemos que

  $$\operatorname{dom}(f \circ g) = (-\infty,3) \cap [-1,1] = [-1,1].$$

  Finalmente, calculemos ley de asignación para $f \circ g$. Tenemos que

  $$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(1-2x) \\ &= 2(1-2x)-1 \\ &= 1-4x. \end{aligned}$$

- Para $g \circ f$: primero calculamos el dominio de $g \circ f$, así, si $x \in \operatorname{dom}(g \circ f)$, tenemos que:

  $$x \in \operatorname{dom}(f) \qquad \text{y} \qquad f(x) \in \operatorname{dom}(g).$$

  Ahora, si $x \in \operatorname{dom}(f)$ entonces $x \in [-1,3]$. Por otra parte, notemos que

  $$\begin{aligned} f(x) \in \operatorname{dom}(g) &\iff 2x-1 \in (-\infty,3) \\ &\iff 2x-1 < 3 \end{aligned}$$

$$\iff x \leq 2$$

Por lo tanto
$$x \in (-\infty, 2)$$

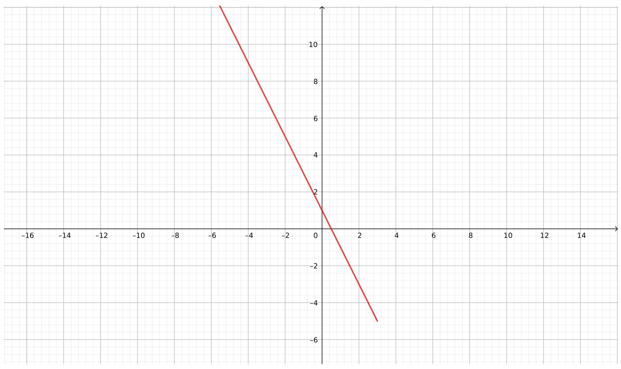
Así, tenemos que
$$\operatorname{dom}(g \circ f) = [-1, 3] \cap (-\infty, 2) = [-1, 2).$$

Finalmente, calculemos ley de asignación para $g \circ f$. Tenemos que
$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= f(2x - 1) \\ &= 1 - 2(2x - 1) \\ &= 3 - 4x.\end{aligned}$$
□

5. ¿Se puede invertir la función
$$\begin{aligned} g\colon (-\infty, 3) &\longrightarrow (-5, +\infty) \\ x &\longmapsto f(x) = 1 - 2x? \end{aligned}$$

De poder, halle la inversa.

Solución. Se tiene que la gráfica de la función es la siguiente:



Así, la función es inyectiva. Por otra parte, tenemos que $\operatorname{img}(f) = (-5, +\infty)$, por lo cual la función es biyectiva. Así, f es invertible.

Calculemos la inversa de f. Si tomamos $y = f(x) = 1 - 2x$, se tiene que
$$\begin{aligned} y = 1 - 2x &\iff y - 1 = -2x \\ &\iff 2x = 1 - y \\ &\iff x = \frac{1 - y}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto
$$\begin{aligned} f^{-1}\colon (-5, +\infty) &\longrightarrow (-\infty, 3) \\ x &\longmapsto f^{-1}(x) = \frac{1 - x}{2}. \end{aligned}$$
□

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL ECUADOR

CÁLCULO DIFERENCIAL • TALLER NO. 3

25 de mayo de 2018 *Mat. Andrés Merino*

1. Dada la función

$$\begin{aligned} f\colon I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{1}{x}, \end{aligned}$$

calcular

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Solución. Se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} \\ &= \frac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h} \\ &= -\frac{h}{hx(x+h)} \\ &= -\frac{1}{x^2+xh}. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} -\frac{1}{x^2+xh} \\ &= -\lim_{h\to 0} \frac{1}{x^2+xh} \\ &= -\frac{\lim\limits_{h\to 0} 1}{\lim\limits_{h\to 0} x^2+xh} \\ &= -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

□

2. Calcular

$$\lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{4-x}$$

Solución. Analizando el denominador, tenemos que

$$\lim_{x\to 4} 4-x = 4-4 = 0,$$

mientras que en el numerador

$$\lim_{x\to 4} 2-\sqrt{x} = 2-\sqrt{4} = 2-2 = 0,$$

con lo cual obtenemos una indeterminación y por lo tanto realizaremos una manipulación algebraica.

Tenemos que

$$\frac{2-\sqrt{x}}{4-x} = \frac{2-\sqrt{x}}{4-x} \cdot \frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}{(4-x)(2+\sqrt{x})} \\
&= \frac{4-x}{(4-x)(2+\sqrt{x})} \\
&= \frac{1}{2+\sqrt{x}},
\end{aligned}
$$

por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{4-x} &= \lim_{x\to 4} \frac{1}{2+\sqrt{x}} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to 4} 1}{\lim\limits_{x\to 4}(2+\sqrt{x})} \\
&= \frac{1}{2+\sqrt{4}} \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

□

3. Calcular

$$
\lim_{x\to 2^-} \frac{1-x}{x^2-4}
$$

Solución. Analizando el denominador, tenemos que

$$
\lim_{x\to 2^-} x^2-4 = 2^2-4 = 0,
$$

mientras que en el numerador

$$
\lim_{x\to 2^-} 1-x = 1-2 = -1,
$$

por lo tanto el límite no existe, pero es un infinto. Notemos que, ya que $x \to 2^-$,

$$
1-x<0 \qquad \text{y} \qquad x^2-4<0,
$$

por lo tanto

$$
\lim_{x\to 2^-} \frac{1-x}{x^2-4} = +\infty.
$$

□

4. Calcular

$$
\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}
$$

Solución. Analizando el denominador, tenemos que

$$
\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} = +\infty,
$$

mientras que en el numerador

$$
\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty,
$$

con lo cual obtenemos una indeterminación y por lo tanto realizaremos una manipulación algebraica.

Tenemos que

$$
\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}
$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}.$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}.$$

Analizando nuevamente el denominador, se tiene que

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1,$$

y en el numerador

$$\lim_{x\to+\infty} 1 = 1,$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} = 1.$$

□

5. Calcular

$$\lim_{x\to-\infty} x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

Solución. Tenemos que

$$x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) = \frac{\pi \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{\pi}{x}}.$$

Ahora, gracias a que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\pi}{x} = 0,$$

tomamos el cambio de variable $y = \frac{\pi}{x}$ y se tiene que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{\pi}{x}} = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} = 1.$$

□

$\aleph_0$