Semestre 2019-1 Mat. Andrés Merino

1. Sea $n \in \mathbb{N}^*$, determinar el valor de

a) $\sum_{k=2}^{n}(k^2-2k+1)$.

b) $\sum_{k=10}^{n} k^2$.

Solución.

a) Aplicando las propiedades de la suma, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}(k^2-2k+1) &= (1)^2-2(1)+1+\sum_{k=2}^{n}(k^2-2k+1)-(1)^2+2(1)-1\\ &= \sum_{k=2}^{n}(k^2-2k+1)\\ &= \sum_{k=1}^{n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-2\frac{n(n+1)}{2}+n\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-n(n+1)+n\\ &= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.\end{aligned}$$

b) Tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{k=10}^{n}k^2 &= \sum_{k=1}^{9}k^2+\sum_{k=10}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{9}k^2\\ &= \sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{9}k^2\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{9(9+1)(2(9)+1)}{6}\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-285.\end{aligned}$$

□

2. Considere el intervalo $[-1,4]$ y la función

$$\begin{aligned} f:[-1,4] &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto 2-x.\end{aligned}$$

a) Sean P la partición uniforme de orden 5 del intervalo y C las etiquetas derechas de esta, escribir P y C.

b) Dibujar la función f y los rectángulos que determinan $S(f,P,C)$.

c) Utilizando el gráfico, ¿cuál es le valor de $S(f,P,C)$?

Solución.

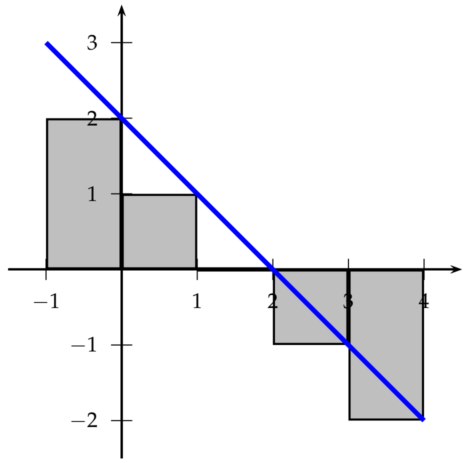
a) Tomemos $a = -1$ y $b = 4$. Como P es la partición es uniforme de orden 5, tenemos que

$$\Delta x = \frac{4-(-1)}{5} = 1,$$

por lo tanto, tenemos que

$$P = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\} \qquad \text{y} \qquad C = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

b) El gráfico es:



c) Utilizando el gráfico anterior, tenemos que $S(f, P, C)$ es la suma de las áreas de los rectángulos del gráfico, por lo tanto

$$S(f, P, C) = 2 + 1 + 0 - 1 - 2 = 0. \qquad \square$$

3. Considere el intervalo $[0, 2]$ y la función

$$\begin{aligned} f : [0,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

a) Sean P la partición uniforme de orden $n \in \mathbb{N}^*$ del intervalo y C las etiquetas centrales de esta. Determinar $S(f, P, C)$.

b) Utilizar el literal anterior para determinar $\displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx$.

Solución.

a) Tomemos $a = 0$ y $b = 2$. Como P es una partición uniforme, tenemos que

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n},$$

Ahora, para las etiquetas, tenemos que

$$c_k = a + \left(k - \frac{1}{2}\right) \Delta x = \frac{1}{n}(2k-1)$$

con $k = 1, \ldots, n$. Con esto, tenemos que

$$\begin{aligned} S(f, P, C) &= \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{1}{n}(2k-1)\right)^2}{2} \frac{2}{n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (4k^2 - 4k + 1)\frac{1}{n^3} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n^3}\left(4\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k + 4\sum_{k=1}^{n} 1\right) \\
&= \frac{1}{n^3}\left(4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)}{2} + n\right) \\
&= \frac{1}{n^3}\left(\frac{4n^3 - n}{3}\right) \\
&= \frac{4}{3} - \frac{1}{3n^2}.
\end{aligned}
$$

b) Como f es una función polinomial, es continua, y por lo tanto, integrable. Con esto, utilizando el literal anterior, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\int_1^3 f(x)\,dx &= \lim_{n\to+\infty} S(f,P,C) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3n^2}\right) \\
&= \frac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

□

4. Utilizando el Primer Teorema Fundamental del Cálculo para determinar la derivada de las funciones definidas por

a) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \cos(t^3)\,dt.$

b) $G(x) = \displaystyle\int_{-x^2}^{0} \frac{t}{t^2+1}\,dt.$

Solución.

a) Dado que la función $t \mapsto \cos(t^3)$ es la composición de una función trigonométrica con una función polinómica, se tiene que es continua, por lo tanto

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x \cos(t^3)\,dt\right) = \cos(x^3),$$

para $x \in \mathbb{R}$.

b) Dado que la función $t \mapsto \frac{t}{t^2+1}$ es continua y las funciones $x \mapsto -x^2$ y $x \mapsto 0$ son derivables, se tiene que

$$G'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_{-x^2}^{0} \frac{t}{t^2+1}\,dt\right) = \frac{0^2}{0^2+1}(0)' - \frac{-x^2}{(-x^2)^2+1}(x^2)' = \frac{2x^3}{x^4+1},$$

para $x \in \mathbb{R}$.

□

5. Calcular las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int x\ln(1+x^2)\,dx.$

b) $\displaystyle\int \frac{x+4}{(x-2)(x+1)}\,dx.$

Solución.

a) Considerando el cambio de variable

$$u = 1 + x^2, \qquad du = 2x\,dx,$$

con esto, se tiene

$$\int x\ln(1+x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int \ln(u)\,du$$

$$= \frac{1}{2}(u \ln(u) - u) + c$$
$$= \frac{1}{2}((1+x^2)\ln(1+x^2) + 1 + x^2) + c$$

con $c \in \mathbb{R}$.

b) Utilizando fracciones parciales, tenemos que

$$\frac{x+4}{(x-2)(x+1)} = \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x+1},$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{x+4}{(x-2)(x+1)}\,dx &= \int \left(\frac{2}{x-2} - \frac{1}{x+1}\right)\,dx \\ &= \int \frac{2}{x-2}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx \\ &= 2\ln|x-1| - \ln|x+1| + c,\end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$. □

6. Calcular las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^5(x)\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos(x)\,dx.$

Solución.

a) Notemos que

$$\int_0^{\pi/2} \cos^5(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^4(x)\cos(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} (1-\operatorname{sen}^2(x))^2\cos(x)\,dx,$$

con esto, tomemos el cambio de variable

$$u = \operatorname{sen}(x) \qquad \text{y} \qquad du = \cos(x)\,dx,$$

con lo cual, tenemos

x	u
0	0
$\pi/2$	1

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \cos^5(x)\,dx &= \int_0^{\pi/2} (1-\operatorname{sen}^2(x))^2\cos(x)\,dx \\ &= \int_0^1 (1-u^2)^2\,du \\ &= \int_0^1 (1-2u^2+u^4)\,du \\ &= \left(u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{8}{15}.\end{aligned}$$

□

7. Calcular las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx.$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx.$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}(x)}}\,dx.$

Solución.

a) Tomemos $b > 0$ y calculemos

$$\int_0^b e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^b = -\frac{1}{2}e^{-2b} + \frac{1}{2}.$$

Con esto, tomando el límite, se tiene que

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-2x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-2b}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

b) Tomemos $b < 0$ y calculemos

$$\int_b^0 xe^{-x^2}\,dx,$$

para lo cual, utilicemos el cambio de variable

$$u = -x^2 \qquad du = -2x\,dx$$

con lo cual

x	u
b	$-b^2$
0	0

Así, obtenemos que

$$\int_b^0 xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_{-b^2}^0 e^u\,du = -\frac{1}{2}e^u\Big|_{-b^2}^0 = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-b^2}.$$

Con esto, tomando el límite, se tiene que

$$\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to-\infty}\int_b^0 xe^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-b^2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

c) Dado que la función $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}(x)}}$ tiene una asíntota en $\pi/2$, se debe estudiar como una integral impropia. Para esto, tomemos $b \in]0,\pi/2[$ y calculemos

$$\int_0^b \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}(x)}}\,dx.$$

Para esto, considerando el cambio de variable

$$u = 1-\operatorname{sen}(x), \qquad du = -\cos(x)dx,$$

se tiene

x	u
0	1
b	$1-\operatorname{sen}(b)$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_0^b \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}(x)}}\,dx &= -\int_1^{1-\operatorname{sen}(b)} \frac{du}{\sqrt{u}}\\ &= -\int_1^{1-\operatorname{sen}(b)} u^{-1/2}du\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -2\sqrt{u}\Big|_{1}^{1-\operatorname{sen}(b)} \\
&= -2\sqrt{1-\operatorname{sen}(b)} + 2.
\end{aligned}
$$

Con esto, tomando el límite

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}(x)}}\, dx &= \lim_{b\to\pi/2^+} \int_0^{b} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}(x)}}\, dx \\
&= \lim_{b\to\pi/2^+} \left(-2\sqrt{1+\operatorname{sen}(b)} + 2\right) \\
&= 2.
\end{aligned}
$$

□

---

1. Utilizando directamente la fórmula, calcule el área comprendida entre las gráficas de las funciones

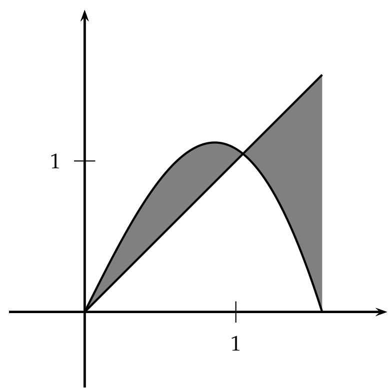
$$\begin{aligned} f\colon [0,\pi/2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x\cos(x) \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g\colon [0,\pi/2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Sugerencia: dibujar primero las funciones.

Solución. Tenemos que el área entre las gráficas de las funciones es

$$A = \int_0^{\pi/2} |f(x) - g(x)|\, dx,$$

para calcular esta integral, primero, grafiquemos la región:



debemos determinar el punto donde las funciones se igualan, notemos que para $x \in [0, \pi/2]$, se tiene que

$$f(x) = g(x) \iff 2x\cos(x) = x \iff x = \pi/3.$$

Con esto, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} |f(x) - g(x)|\, dx &= \int_0^{\pi/3} |f(x) - g(x)|\, dx + \int_{\pi/3}^{\pi/2} |f(x) - g(x)|\, dx \\ &= \int_0^{\pi/3} (f(x) - g(x))\, dx + \int_{\pi/3}^{\pi/2} (g(x) - f(x))\, dx \\ &= \int_0^{\pi/3} (2x\cos(x) - x)\, dx + \int_{\pi/3}^{\pi/2} (x - 2x\cos(x))\, dx \\ &= \left(2\cos(x) + 2x\,\mathrm{sen}(x) - \frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_0^{\pi/3} + \left(\frac{1}{2}x^2 - 2\cos(x) - 2x\,\mathrm{sen}(x)\right)\Bigg|_{\pi/3}^{\pi/2} \\ &= -1 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\pi^2}{18} + 1 - \pi + \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{5\pi^2}{72} \\ &= -\pi + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} + \frac{\pi^2}{72}, \end{aligned}$$

por lo tanto, el área es $-\pi + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} + \frac{\pi^2}{72}$. □

2. Una varilla de 2 metros se ubica en el centro de coordenadas de un plano cartesiano, con esto, se tiene que su densidad está dada por

$$\begin{aligned} \delta\colon [-1,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^x. \end{aligned}$$

Determinar la masa de esta varilla y su centro de gravedad (utilizar directamente las fórmulas).

Solución. La masa de la varilla está dada por

$$m = \int_{-1}^{1} \delta(x)\, dx = \int_{-1}^{1} e^x\, dx = e^x \Big|_{-1}^{1} = e - e^{-1}.$$

Por otro lado, su momento de inercia respecto al origen del sistema coordenado es

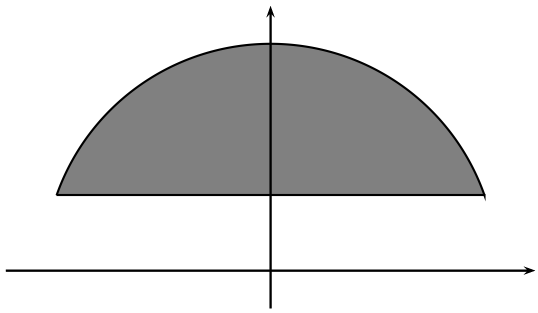
$$M_0 = \int_{-1}^{1} x\delta(x)\, dx = \int_{-1}^{1} xe^x\, dx = (xe^x - e^x)\Big|_{-1}^{1} = 2e^{-1}.$$

Con esto, tenemos que su centro de gravedad está en

$$\bar{x} = \frac{M_0}{m} = \frac{e - e^{-1}}{2e^{-1}} = \frac{2}{e^2 - 1} \approx 0{,}31.$$

□

3. Un mullo puede ser visto como el resultado de rotar, al rededor del eje x, la región del siguiente gráfico:



donde las curvas que delimitan la figura tienen ecuación

$$x^2 + y^2 = 25 \qquad \text{y} \qquad y = 3.$$

a) Mediante una partición en el eje x, plantee una suma de Riemann que aproxime el volumen de sólido del mullo.

b) En base al literal anterior, plantee una integral para calcular el volumen del mullo y determine su valor.

Solución.

a) Primero, determinemos los puntos donde la gráficas se corta, es decir, resolvamos el sistema

$$x^2 + y^2 = 25 \qquad \text{y} \qquad y = 3,$$

de donde, tenemos que

$$x = 4 \qquad \text{o} \qquad x = -4,$$

por lo tanto, los puntos en los que las gráficas se cortan son

$$(-4, 1) \qquad \text{y} \qquad (4, 1).$$

Dado que realizaremos la partición en el eje x, consideremos las funciones

$$\begin{aligned} f \colon [-4,4] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{25 - x^2} \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g \colon [-4,4] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 3 \end{aligned}$$

Si llamamos V al volumen del sólido y realizamos una partición uniforme del intervalo $[-4, 4]$, de grosor Δx, con etiquetas $\{x_k : k = 1, \ldots n\}$, se genera una arandela de radio mayor $f(x_k)$, radio menor $g(x_k)$ y espesor Δx, por lo tanto tenemos que el volumen puede ser aproximado por

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{k=1}^{n} \pi \left((f(x_k))^2 - (g(x_k))^2 \right) \Delta x \\ &\approx \sum_{k=1}^{n} \pi \left(\left(\sqrt{25 - x_k^2} \right)^2 - (3)^2 \right) \Delta x \\ &\approx \sum_{k=1}^{n} \pi (16 - x_k^2) \Delta x \end{aligned}$$

b) Del literal anterior, tomando el límite cuando Δx tiende a 0, tenemos que

$$V = \int_{-4}^{4} \pi (16 - x^2)\, dx = \pi \left(16x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-4}^{4} = \frac{256}{3}\pi.$$

□

4. Dada la función

$$\begin{aligned} f\colon [0,\pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \operatorname{sen}(x) \end{aligned}$$

plantee una suma de Riemann que aproxime la longitud de arco de la gráfica de la función f. A partir de esto, plantee una integral que calcule el valor exacto de esta longitud de arco. Finalmente, utilizando algún programa, determine numéricamente este valor.

Solución. Sea $P = \{x_k : k = 0, \ldots, n\}$ una partición regular del intervalo $[0, \pi]$ de grosor $\Delta x > 0$ y orden $n \in \mathbb{N}^*$, con etiquetado $C = \{x_k : k = 1, \ldots, n\}$. Para $k = 1, \ldots, n$, en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, la longitud de arco de la gráfica de la función f se puede aproximar por la distancia entre los puntos

$$(x_{k-1}, \operatorname{sen}(x_{k-1})) \qquad \text{y} \qquad (x_k, \operatorname{sen}(x_k)),$$

es decir, se puede aproximar por

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\operatorname{sen}(x_{k-1}) - \operatorname{sen}(x_k))^2}.$$

Con esto, la longitud de arco de la gráfica de la función f puede ser aproximado por

$$L(f) \approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\operatorname{sen}(x_{k-1}) - \operatorname{sen}(x_k))^2}.$$

Para expresar lo anterior como una suma de Riemann, multipliquemos y dividamos la expresión por Δx, con esto, obtenemos que

$$L(f) \approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\operatorname{sen}(x_{k-1}) - \operatorname{sen}(x_k)}{\Delta x} \right)^2}\, \Delta x,$$

Ahora, tomando el límite cuando Δx tiende a 0, se tiene que

$$\begin{aligned} L(f) &= \int_0^{\pi} \sqrt{1 + ((\operatorname{sen}(x))')^2}\, dx \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2(x)}\, dx \\ &\approx 3{,}82. \end{aligned}$$

□

5. Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable y $n \in \mathbb{N}^*$. Tomando

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \qquad x_k = a + k\Delta x \qquad \text{y} \qquad y_k = f(x_k),$$

para $k = 0, \ldots, n$, la aproximación por la regla de trapecios de orden n de la integral de f es

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_{k-1} + y_k}{2} \Delta x.$$

Explicar detalladamente el origen de esta fórmula.

Solución. $\square$

---

1. Considere el intervalo $[0,10]$ y la función

$$\begin{aligned} f\colon [0,10] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x-3}{3}. \end{aligned}$$

a) Sean P la partición uniforme de orden 5 del intervalo y C las etiquetas izquierdas de esta. Dibujar la función f y los rectángulos que determinan $S(f,P,C)$.

b) Sean P la partición uniforme de orden $n \in \mathbb{N}^*$ del intervalo y C las etiquetas derechas de esta. Determinar $S(f,P,C)$.

c) Utilizar el literal anterior para determinar $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,dx$.

Solución.

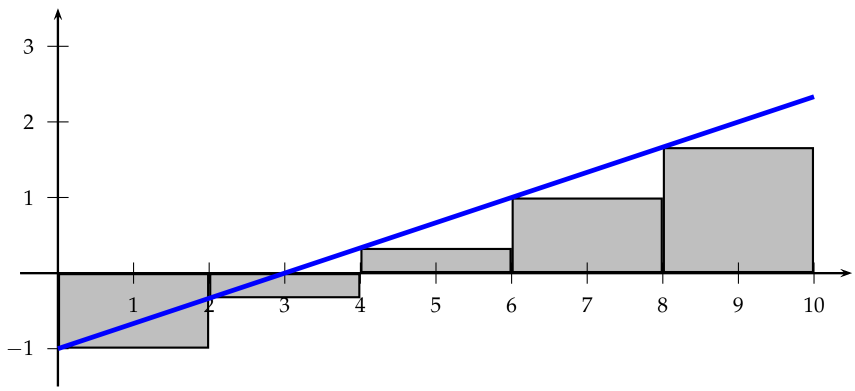
a) Tomemos $a=0$ y $b=10$. Como P es la partición es uniforme de orden 5, tenemos que

$$\Delta x = \frac{10-0}{5} = 2,$$

por lo tanto, tenemos que

$$P = \{0,2,4,6,8,10\} \qquad \text{y} \qquad C = \{0,2,4,6,8\}.$$

Con esto, el gráfico es:



b) Tomemos $a=0$ y $b=10$. Como P es una partición uniforme, tenemos que

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{10}{n},$$

Ahora, para las etiquetas, tenemos que

$$c_k = a + k\Delta x = \frac{10}{n}k$$

con $k = 1,\dots,n$. Con esto, tenemos que

$$\begin{aligned} S(f,P,C) &= \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{10}{n}k - 3}{3}\frac{10}{n} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n}(10k-3n)\frac{10}{3n^2}\\
&= \frac{10}{3n^2}\left(10\sum_{k=1}^{n}k-3n\sum_{k=1}^{n}1\right)\\
&= \frac{10}{3n^2}\left(10\frac{n(n+1)}{2}-3n^2\right)\\
&= \frac{10}{3n^2}\left(2n^2+5n\right)\\
&= \frac{20}{3}+\frac{50}{3n}.
\end{aligned}
$$

c) Como f es una función polinomial, es continua, y por lo tanto, integrable. Con esto, utilizando el literal anterior, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\int_0^{10} f(x)\,dx &= \lim_{n\to+\infty} S(f,P,C)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{20}{3}+\frac{50}{3n}\right)\\
&= \frac{20}{3}.
\end{aligned}
$$

□

2. Utilizando el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo calcular

a) $\displaystyle\int_0^2 xe^{x^2}\,dx.$

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} xe^{-x}\,dx.$

Solución.

a) Tomemos el cambio de variable

$$u = x^2 \qquad du = 2x\,dx$$

con lo cual, tenemos

x	u
0	0
2	4

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 xe^{x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^4 e^u\,du\\
&= \frac{1}{2}\left(e^u\right)\Big|_0^4\\
&= \frac{1}{2}\left(e^4-1\right).
\end{aligned}
$$

b) Tomemos $b>1$ y calculemos

$$\int_1^b xe^{-x}\,dx,$$

para esto, utilizamos integración por partes, tomemos

$$u = x, \qquad du = dx$$

y

$$v = -e^{-x}, \qquad dv = e^{-x}\,dx$$

con lo cual obtenemos

$$\begin{aligned}\int_1^b xe^{-x}\,dx &= -xe^{-x}\Big|_1^b + \int_1^b e^{-x}\,dx \\ &= -be^{-b} + 1e^{-1} - e^{-x}\Big|_1^b \\ &= -be^{-b} + 1e^{-1} - \left(e^{-x}\right)\Big|_1^b \\ &= -be^{-b} + 1e^{-1} - e^{-b} + e^{-1} \\ &= 2e^{-1} - (b+1)e^{-b}.\end{aligned}$$

Con esto, tomando el límite, se tiene que

$$\int_1^{+\infty} xe^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b xe^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left(2e^{-1} - (b+1)e^{-b}\right) = \frac{2}{e}.$$

□

3. Utilizando directamente la fórmula, calcule el área comprendida entre la gráfica de la función

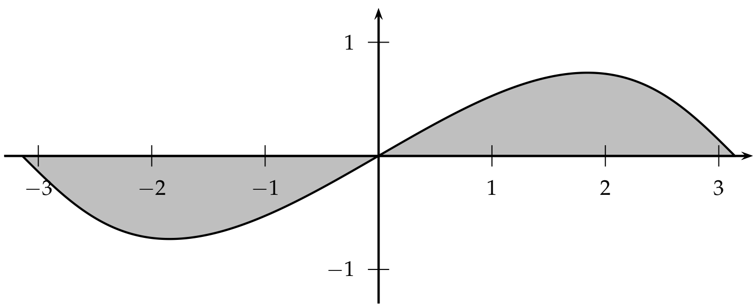
$$\begin{aligned} f\colon [-\pi,\pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{2+\cos(x)}} \end{aligned}$$

y el eje x.

Solución. Tenemos que el área entre las gráficas de las funciones es

$$A = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - 0|\,dx,$$

para calcular esta integral, primero, grafiquemos la región:



debemos determinar el punto donde la función toma el valor de 0, notemos que para $x \in \,]-\pi,\pi[$, se tiene que

$$f(x) = 0 \iff \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{2+\cos(x)}} = 0 \iff \operatorname{sen}(x) = 0 \iff x = 0.$$

Con esto, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx &= \int_{-\pi}^{0} |f(x)|\,dx + \int_0^{\pi} |f(x)|\,dx \\ &= \int_{-\pi}^{0} (-f(x))\,dx + \int_0^{\pi} f(x)\,dx \\ &= -\int_{-\pi}^{0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{2+\cos(x)}}\,dx + \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{2+\cos(x)}}\,dx.\end{aligned}$$

Analicemos la integral

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{2+\cos(x)}}\,dx,$$

considerando el cambio de variable

$$u = 2+\cos(x), \qquad du = \operatorname{sen}(x)dx,$$

se tiene que

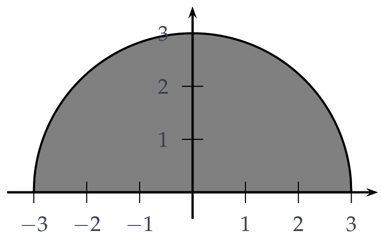
$$\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{2+\operatorname{sen}(x)}}\,dx = -2\sqrt{2+\cos(x)}+C,$$

con $C \in \mathbb{R}$. Con lo cual,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx &= -\int_{-\pi}^{0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{2+\cos(x)}}\,dx + \int_{0}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{2+\cos(x)}}\,dx. \\ &= -\left(-2\sqrt{2+\cos(x)}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \left(-2\sqrt{2+\cos(x)}\right)\Big|_{0}^{\pi} \\ &= 4\sqrt{3}-4.\end{aligned}$$

por lo tanto, el área es $4\sqrt{3}-4$. □

4. Un sólido tiene por base la figura que se muestra a continuación:



Este es un semicírculo de radio 3, además, las secciones transversales perpendiculares al eje x son semicírculos. Plantee una suma de Riemann que aproxime el valor del volumen de este sólido, con ayuda de esto, plantee una integral que calcule el valor del volumen del sólido.

Solución. Para el intervalo $[-3,3]$, sea $P = \{x_k : k = 0,\ldots,n\}$ una partición regular de grosor $\Delta x > 0$ y orden $n \in \mathbb{N}^*$, con etiquetado $C = \{x_k : k = 1,\ldots,n\}$. Para $k = 1,\ldots,n$, en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, la figura generada la podemos aproximar con un prisma de cara semicircular, cuyo grosor es Δx, y el diámetro de su cara semicircular es $\sqrt{9-x_k^2}$, de donde, el área de la cara del prisma sería

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\sqrt{9-x_k^2}}{2}\right)^2,$$

con esto, el volumen de este prisma es

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{9-x_k^2}}{2}\right)^2 \Delta x.$$

Así, el volumen del sólido (que llamaremos V) puede ser aproximado por

$$\begin{aligned}V &\approx \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{9-x_k^2}}{2}\right)^2 \Delta x \\ &\approx \sum_{k=1}^{n} \pi\frac{9-x_k^2}{8}\Delta x.\end{aligned}$$

Tomando el límite cuando Δx tiende a 0, tenemos que el valor exacto del volumen del sólido es

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} \pi \frac{9 - x_k^2}{8} \Delta x = \int_{-3}^{3} \pi \frac{9 - x^2}{8}\, dx. \qquad \square$$

5. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y

$$f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$$

una función. Mediante sumas de Riemann, explique detalladamente cómo se podría aproximar la superficie que se genera al revolucionar la gráfica de la función f al rededor del eje x. Con esto, plantee la fórmula, mediante una integral, que calcula el valor exacto de la superficie.

Solución. Sea $P = \{x_k : k = 0, \ldots, n\}$ una partición regular del intervalo $[a, b]$ de grosor $\Delta x > 0$ y orden $n \in \mathbb{N}^*$, con etiquetado $C = \{x_k : k = 1, \ldots, n\}$. Para $k = 1, \ldots, n$, en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, la figura generada la podemos aproximar con un cono truncado con

- altura Δx;
- radio mayor $f(x_k)$;
- radio menor $f(x_{k-1})$;
- generatriz $\sqrt{(\Delta x)^2 + (f(x_{k-1}) - f(x_k))^2}$.

Con esto, el área de la superficie puede ser aproximada por

$$\pi\left(f(x_{k-1}) + f(x_k)\right)\sqrt{(\Delta x)^2 + (f(x_{k-1}) - f(x_k))^2}$$

Así, el área de la superficie (que llamaremos A) pude ser aproximada por

$$\begin{aligned} A &\approx \sum_{k=1}^{n} \pi\left(f(x_{k-1}) + f(x_k)\right)\sqrt{(\Delta x)^2 + (f(x_{k-1}) - f(x_k))^2} \\ &\approx \sum_{k=1}^{n} \pi\left(f(x_{k-1}) + f(x_k)\right)\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{\Delta x}\right)^2}\, \Delta x. \end{aligned}$$

Ahora, tomando el límite cuando Δx tiende a 0, se tiene que

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} \pi\left(f(x_{k-1}) + f(x_k)\right)\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{\Delta x}\right)^2}\, \Delta x \\ &= \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \end{aligned} \qquad \square$$

6. Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, si para un punto $a \in \mathbb{R}^3$ se conoce que

$$f'(a; (1,1,1)) = 2, \qquad f'(a; (1,0,1)) = -1 \qquad \text{y} \qquad f'(a; (0,-1,1)) = 1,$$

¿cuál es la dirección de máximo crecimiento de la función f en el punto a?

Solución. La dirección de máximo crecimiento de la función f es el gradiente, por lo tanto, debemos calcular $\nabla f(a)$. Sabemos que

$$f'(a; (1,1)) = \nabla f(a) \cdot (1,1,1), \qquad f'(a; (1,0,1)) = \nabla f(a) \cdot (1,0,1) \qquad \text{y} \qquad f'(a; (0,-1,1)) = \nabla f(a) \cdot (0,-1,1),$$

por lo tanto

$$\nabla f(a) \cdot (1,1,1) = 2, \qquad \nabla f(a) \cdot (1,0,1) = -1 \qquad \text{y} \qquad \nabla f(a) \cdot (0,-1,1) = 1$$

Si tomamos $\nabla f(a) = (u, v, w)$, tenemos que

$$2 = \nabla f(a) \cdot (1,1,1) = (u,v,w) \cdot (1,1,1) = u + v + w,$$
$$-1 = \nabla f(a) \cdot (1,0,1) = (u,v,w) \cdot (1,1,1) = u + w$$

y

$$1 = \nabla f(a) \cdot (0,-1,1) = (u,v,w) \cdot (-1,1) = -v + w,$$

por lo tanto

$$u = -5 \qquad v = 3 \qquad \text{y} \qquad w = 4$$

Con esto, se tiene que

$$\nabla f(a) = (-5,3,4),$$

por lo tanto, la dirección que se debe de máximo crecimiento de la función en el punto a es $(-5,3,4)$. $\square$

7. Considere la función

$$\begin{aligned} f\colon \ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \int_y^{xy} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\, dt. \end{aligned}$$

   a) Compruebe que en $(-1,-\pi)$, la función f tiene un punto crítico.
   b) Utilizando el criterio de la segunda derivada, determine la naturaleza del punto $(-1,-\pi)$.

Solución.

a) Para comprobar que el punto $(-1,-\pi)$ es un punto crítico de f, primero calculemos el gradiente de f:

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_y^{xy} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\, dt \right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_y^{xy} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\, dt \right) \right) \\ &= \left(y\frac{\operatorname{sen}(xy)}{xy}, x\frac{\operatorname{sen}(xy)}{xy} - \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} \right) \\ &= \left(\frac{\operatorname{sen}(xy)}{x}, \frac{\operatorname{sen}(xy) - \operatorname{sen}(y)}{y} \right). \end{aligned}$$

Ahora, evaluando en $(-1,-\pi)$, tenemos

$$\nabla f(-1,-\pi) = \left(\frac{\operatorname{sen}(\pi)}{-1}, \frac{\operatorname{sen}(\pi) - \operatorname{sen}(-\pi)}{-1} \right) = (0,0),$$

por lo tanto, $(-1,-\pi)$ es un punto crítico de f.

b) Calculemos la Hessiana de f:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{xy\cos(xy) - \operatorname{sen}(xy)}{x^2} & \cos(xy) \\ \cos(xy) & \dfrac{-\operatorname{sen}(xy) + xy\cos(xy) + \operatorname{sen}(y) - y\cos(y)}{y^2} \end{pmatrix},$$

con esto, evaluemos en $(-1,-\pi)$:

$$H_f(-1,-\pi) = \begin{pmatrix} -\pi & -1 \\ -1 & -\frac{2}{\pi} \end{pmatrix}.$$

Ahora, analicemos los menores de la matriz:

$$\det(H_f(-1,-\pi)_1) = -\pi \qquad \text{y} \qquad \det(H_f(-1,-\pi)_2) = 1,$$

por lo tanto, se tiene que la función f alcanza un máximo en $(-1,-\pi)$. $\square$

8. Suponga que es asesor de la NASA. En una misión a un planeta desconocido, de 6 mil kilómetros de radio, se envía a 2 astronautas para medir la temperatura del planeta y determinar si es habitable. El primer astronauta indica que en cualquier punto (x, y, z) de la superficie del planeta (donde se supone que el planeta está centrado en el origen de coordenadas y que estas están medidas en miles de kilómetros) la temperatura está dada por $6x - y^2 + xz + 60$ grados centígrados. El segundo astronauta indica que en las coordenadas $(-4, 4, 2)$ existe un extremo de la temperatura, pero en el momento de decir si es un máximo o mínimo, la comunicación se corta.

   a) Plantee un modelo adecuado de optimización con restricciones que ayude a determinar si el punto indicado es un máximo o mínimo.

   b) Con ayuda del modelo anterior, determine el multiplicador de Lagrange asociado al punto $(-4, 4, 2)$.

   c) Utilizando el criterio de la segunda derivada, concluya si en el punto $(-4, 4, 2)$ se tiene un máximo o un mínimo de temperatura.

Solución.

a) Tomemos que

- (x, y, z): las coordenadas espaciales medias en miles de kilómetros.
- $T(x, y, z)$: la temperatura en el punto (x, y, z), medido en grados centígrados

Con esto, se tiene el campo escalar

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & 6x - y^2 + xz + 60. \end{array}$$

Además, dado que en el problema solo nos enfocamos en los puntos de la superficie del planeta, es necesario que

$$x^2 + y^2 + z^2 = 36.$$

Con esto, el problema que debemos resolver es

$$\text{optimizar } T(x, y, z) \qquad \text{sujeto a:} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 36.$$

b) Definamos el lagrangeano del problema:

$$\begin{array}{rccl} L: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\lambda,x,y,z) & \longmapsto & T(x,y,z) - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 36). \end{array}$$

Se tiene que el gradiente de L es

$$\nabla L(\lambda, x, y, z) = (36 - x^2 - y^2 - z^2, 6 + z - 2x\lambda, -2y - 2y\lambda, x - 2z\lambda)$$

para $(\lambda, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$. Para encontrar el multiplicador de Lagrange asociado a $(-4, 4, 2)$, igualamos el gradiente a 0. Así, si $L(\lambda, x, y, z) = 0$, entonces

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 36, \\ 6 + z = 2x\lambda, \\ 2y(1 + \lambda) = 0, \\ x = 2z\lambda. \end{cases}$$

Por el dato del segundo astronauta, sabemos en $x = -4$, $y = 4$ y $z = 2$ hay un extremo. Entonces si $L(\lambda, -4, 4, 2) = 0$, se tiene que $\lambda = -1$.

c) Calculamos la matriz hessiana y tenemos que

$$H_L(\lambda, x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & -2x & -2y & -2z \\ -2x & -2\lambda & 0 & 1 \\ -2y & 0 & -2 - 2\lambda & 0 \\ -2z & 1 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}.$$

para $(\lambda, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$. Evaluamos en $(-1, -4, 4, 2)$:

$$H_L(-1, -4, 4, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -8 & -4 \\ 8 & 2 & 0 & 1 \\ -8 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dado que tenemos una restricción, tomamos $m = 1$, y analizamos los menores de la matriz a partir de $2m + 1$, es decir, a partir del menor número 3:

$$(-1)^m \det(H_L(a)_3) = 128 > 0 \qquad \text{y} \qquad (-1)^m \det(H_L(a)_4) = 192 > 0,$$

dado que todos son positivos, se tiene que en el punto $(-4, 4, 2)$ la temperatura alcanza un mínimo.

$\square$
