Semestre 2019-2 Mat. Andrés Merino

1. Formalmente, ¿qué es un conjunto difuso? ¿Cómo se representaría el conjunto difuso universo? ¿Cómo se representaría el conjunto difuso vacío?

   Solución. Un conjunto difuso es una función que va de un universo U al intervalo $[0,1]$. El conjunto universo se representa por la función constante 1 y el conjunto vacío se representa por la función constante 0. □

2. Dado un conjunto difuso A en un universo U, en general, ¿es verdad que $A \cup A^c = U$? ¿es verdad que $(A^c)^c = A$? De ser verdad, demuéstrelo, de no ser verdad, presente un ejemplo.

   Solución. En general, no es verdad que $A \cup A^c = U$, por ejemplo, consideremos el universo

$$U = \{a,\, b\}$$

   y el conjunto difuso

$$A = \left\{ \frac{0{,}3}{a} + \frac{1{,}0}{b} \right\},$$

   se tiene que

$$A^c = \left\{ \frac{0{,}7}{a} + \frac{0{,}0}{b} \right\} \qquad \text{y} \qquad A \cup A^c = \left\{ \frac{0{,}7}{a} + \frac{1{,}0}{b} \right\}$$

   y, dado que

$$U = \left\{ \frac{1{,}0}{a} + \frac{1{,}0}{b} \right\},$$

   se tiene que

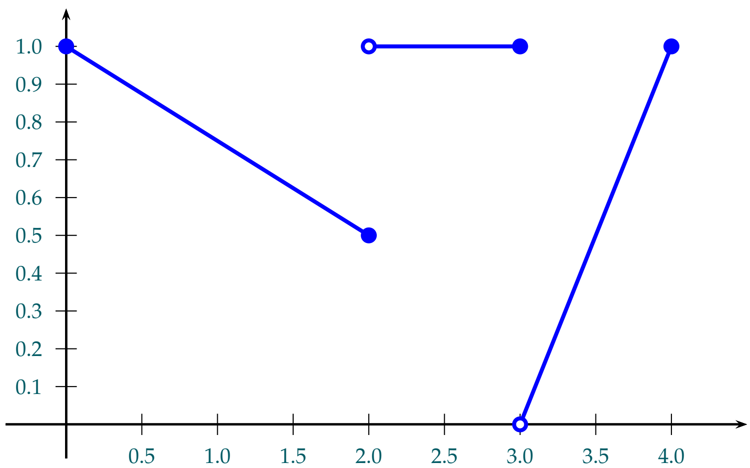
$$A \cup A^c \neq U.$$

   Por otro lado, en general, es verdad que $(A^c)^c = A$, en efecto, notemos que para $x \in U$,

$$\begin{aligned} (A^c)^c(x) &= 1 - A^c(x) \\ &= 1 - (1 - A(x)) \\ &= A(x), \end{aligned}$$

   así $(A^c)^c = A$. □

3. Dado el universo $U = [0,4]$ y los conjuntos difusos A:



y

$$\begin{aligned} B\colon [0,4] &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto B(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & 0 \le x < 2 \\ \frac{2}{3} & 2 \le x \le 4, \end{cases} \end{aligned}$$

determinar gráfica y analíticamente los conjuntos

$$A,\ B,\ A^c,\ B^c,\ A \cup B,\ A \cap B,\ A \cup B^c.$$

¿Cuál es el nivel de pertenencia de $\frac{1}{2}$ a cada uno de estos conjuntos? ¿Cuál es el núcleo, frontera y soporte de cada uno de estos conjuntos?

Solución.

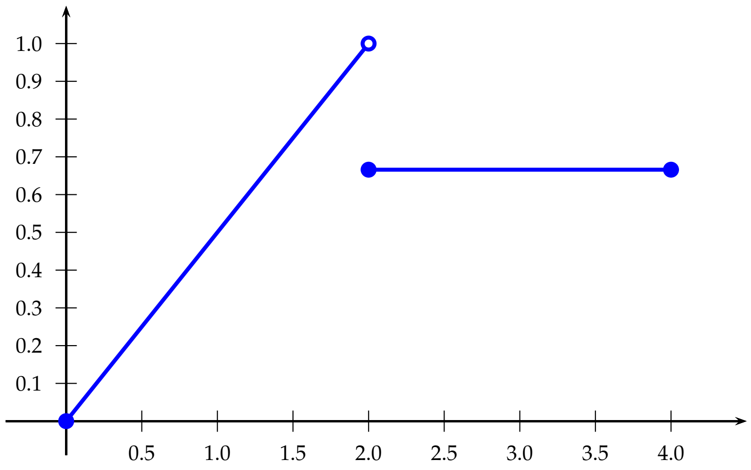
- Para A, se tiene que

$$\begin{aligned} A\colon [0,4] &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto A(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{4} & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 1 & \text{si } 2 < x \le 3 \\ x - 3 & \text{si } 3 < x \le 4, \end{cases} \end{aligned}$$

  Por lo tanto,

$$\text{soporte}(A) = [0,4], \qquad \text{frontera}(A) = (0,2] \cup (3,4) \qquad \text{y} \qquad \text{núcleo}(A) = (2,3]$$

- Para B, se tiene que el gráfico



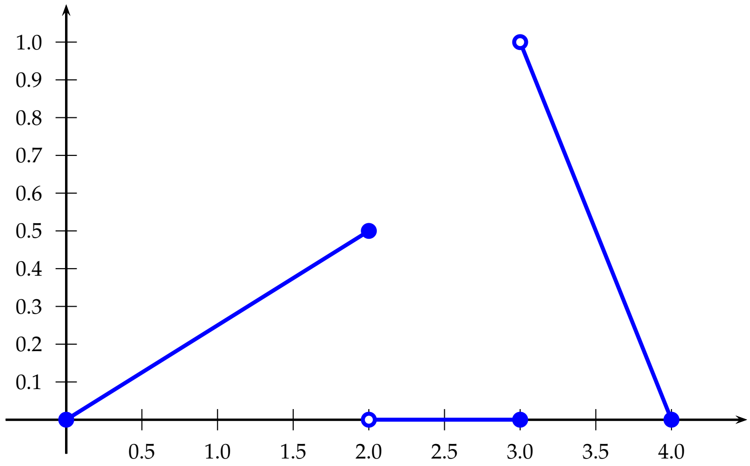
  Por lo tanto,

$$\text{soporte}(B) = (0,4], \qquad \text{frontera}(B) = (0,4] \qquad \text{y} \qquad \text{núcleo}(B) = \varnothing.$$

- Para A^c, se tiene que

$$\begin{aligned} A^c\colon [0,4] &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto A^c(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{si } 2 < x \le 3 \\ 4 - x & \text{si } 3 < x \le 4. \end{cases} \end{aligned}$$

  Con esto, su gráfico es



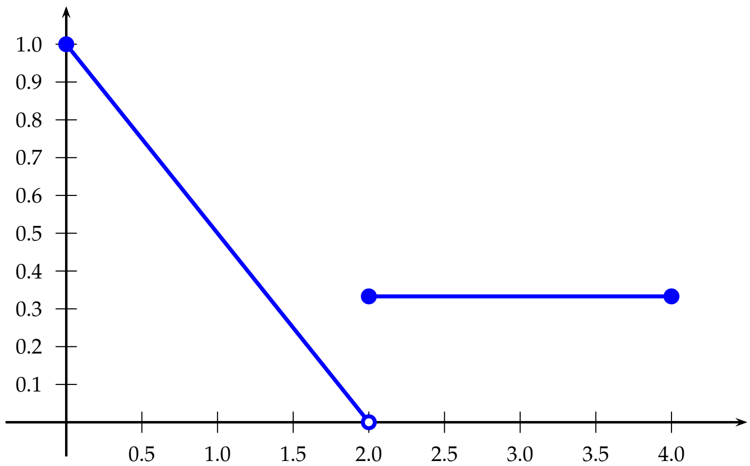
Por lo tanto,

$$\text{soporte}(A^c) = (0,2] \cup (3,4), \qquad \text{frontera}(A^c) = (0,2] \cup (3,4) \qquad \text{y} \qquad \text{núcleo}(A^c) = \varnothing.$$

- Para B^c, se tiene que

$$\begin{aligned} B^c : [0,4] &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto B^c(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2} & 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{3} & 2 \leq x \leq 4. \end{cases} \end{aligned}$$

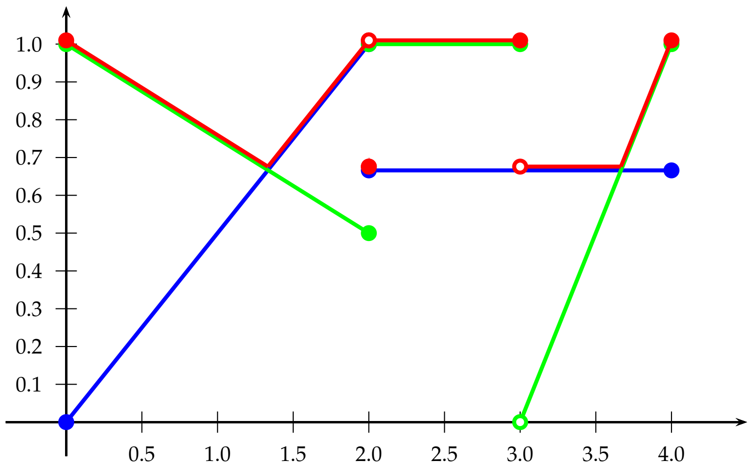
Con esto, su gráfico es



Por lo tanto,

$$\text{soporte}(B^c) = [0,4] \qquad \text{frontera}(B^c) = (0,4] \qquad \text{y} \qquad \text{núcleo}(B^c) = \{0\}$$

- Para $A \cup B$, gráficamente tenemos que



Con lo cual

$$\begin{aligned} A\cup B\colon [0,4] &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto A\cup B(x) = \begin{cases} 1-\frac{x}{4} & \text{si } 0\leq x\leq \frac{4}{3} \\ \frac{x}{2} & \text{si } \frac{4}{3}<x<2 \\ \frac{2}{3} & \text{si } x=2 \\ 1 & \text{si } 2<x\leq 3 \\ \frac{2}{3} & \text{si } 3<x\leq \frac{11}{3} \\ x-3 & \text{si } \frac{11}{3}<x\leq 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\text{soporte}(A\cup B) = [0,4] \qquad \text{frontera}(A\cup B) = (0,2]\cup(3,4) \qquad \text{y} \qquad \text{núcleo}(A\cup B) = (2,3]\cup\{0,4\}$$

□

4. Dado el universo $U=\{0,1,2,3,4\}$ y los conjuntos

$$A=\left\{\frac{1}{0}+\frac{0{,}6}{2}+\frac{0{,}4}{3}+\frac{0{,}9}{4}\right\} \qquad \text{y} \qquad B=\left\{\frac{1}{1}+\frac{0{,}4}{2}+\frac{0{,}9}{3}+\frac{0{,}3}{4}\right\},$$

determinar gráfica y analíticamente los conjuntos

$$A,\ B,\ A^c,\ B^c,\ A\cup B,\ A\cap B,\ A\cup B^c.$$

¿Cuál es el nivel de pertenencia de 1 a cada uno de estos conjuntos? ¿Cuál es el núcleo, frontera y soporte de cada uno de estos conjuntos?

Solución.

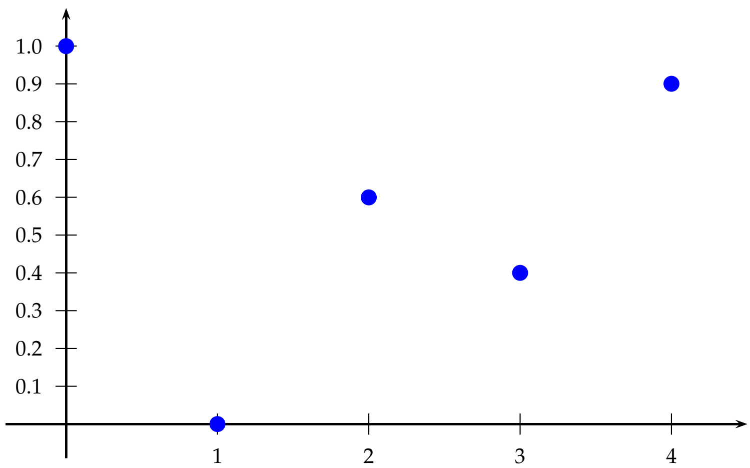
- Para A, se tiene que

$$A=\left\{\frac{1{,}0}{0}+\frac{0{,}6}{2}+\frac{0{,}4}{3}+\frac{0{,}9}{4}\right\},$$

por lo tanto,

$$\text{soporte}(A)=\{0,2,3,4\}, \qquad \text{frontera}(A)=\{2,3,4\} \qquad \text{y} \qquad \text{núcleo}(A)=\{0\}.$$

Además, su gráfico es

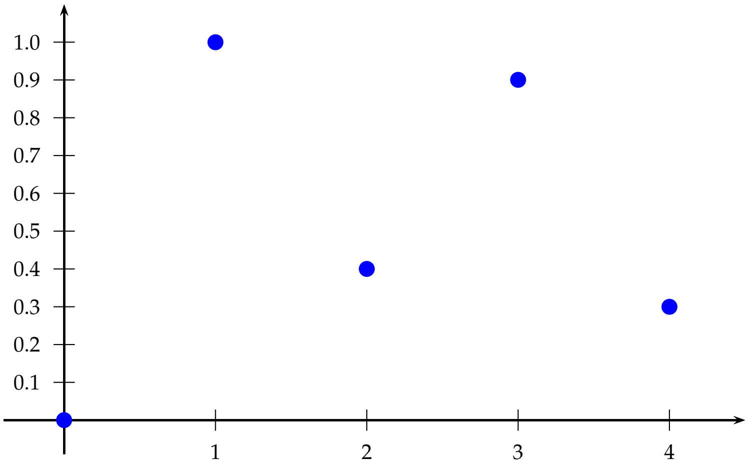


- Para B, se tiene que

$$B=\left\{\frac{1{,}0}{1}+\frac{0{,}4}{2}+\frac{0{,}9}{3}+\frac{0{,}3}{4}\right\},$$

por lo tanto,

$$\text{soporte}(B)=\{1,2,3,4\} \qquad \text{frontera}(B)=\{2,3,4\} \qquad \text{y} \qquad \text{núcleo}(B)=\{1\}$$

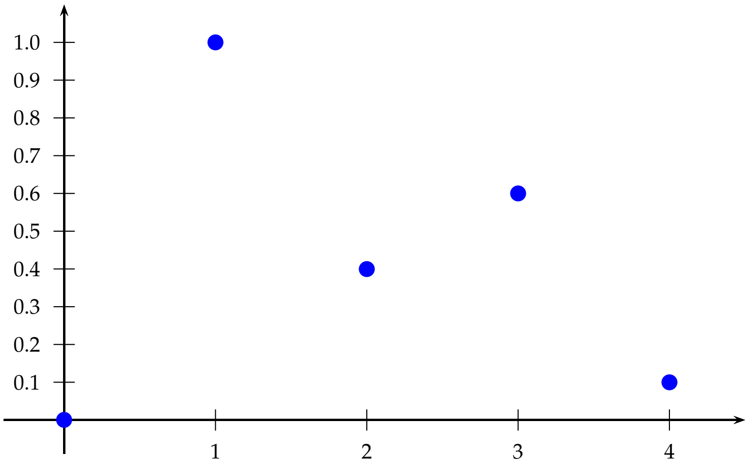


- Para A^c, se tiene que

$$A^c = \left\{ \frac{0{,}0}{0} + \frac{1{,}0}{1} + \frac{0{,}4}{2} + \frac{0{,}6}{3} + \frac{0{,}1}{4} \right\},$$

por lo tanto,

$$\text{soporte}(A^c) = \{2,3,4\} \qquad \text{frontera}(A^c) = \{2,3,4\} \qquad \text{y} \qquad \text{núcleo}(A^c) = \varnothing$$

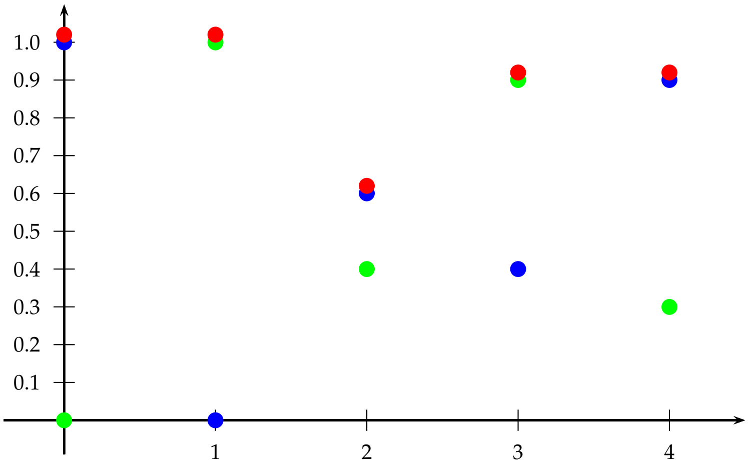


- Para $A \cup B$, se tiene que

$$A \cup B = \left\{ \frac{1{,}0}{0} + \frac{1{,}0}{1} + \frac{0{,}6}{2} + \frac{0{,}9}{3} + \frac{0{,}9}{4} \right\},$$

por lo tanto

$$\text{soporte}(A \cup B) = U \qquad \text{frontera}(A \cup B) = \{2,3,4\} \qquad \text{y} \qquad \text{núcleo}(A \cup B) = \{0,1\}$$



□

1. Formalmente, ¿qué es un conjunto difuso? Intuitivamente, ¿qué es un conjunto difuso y para qué sirven? ¿Cuál es el conjunto difuso vacío?

Solución. Un conjunto difuso es una función que va de un universo al intervalo $[0,1]$. □

2. Dados un universo U y conjuntos difusos A y B, en general, ¿es verdad que $A \cap A^c = \varnothing$? ¿es verdad que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$? De ser verdad, demuéstrelo, de no ser verdad, presente un contraejemplo.

Solución. Definamos, sobre el universo $[0,1]$ la función de pertenencia $A(x) = x$, entonces $A^c(x) = 1 - x$. Así, si tomamos $x = 0{,}5$, se tiene que

$$A \cap A^c(x) = \text{mín}\{A(x), A^c(x)\} = \text{mín}\{0{,}5, 0{,}5\} = 0{,}5,$$

por lo tanto $A \cup A^c \neq U$.

Por otra parte, tenemos que

$$\begin{aligned}(A \cap B)^c(x) &= 1 - (A \cap B)(x)\\ &= 1 - \text{mín}\{A(x), B(x)\}\\ &= 1 + \text{máx}\{-A(x), -B(x)\}\\ &= \text{máx}\{1 - A(x), 1 - B(x)\}\\ &= A^c(x) \cup B^c(x),\end{aligned}$$

así $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. □

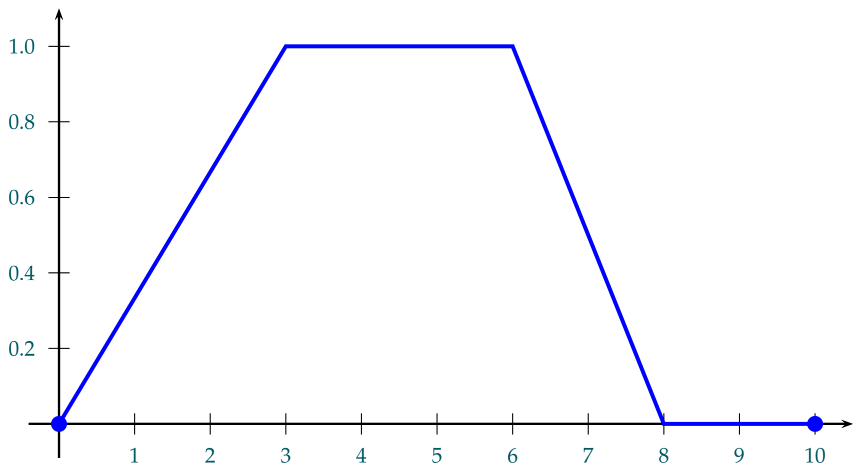
3. Considerando el universo al intervalo $U = [0,10]$, considere los siguientes conjuntos difusos

$$A\colon U \to [0,1] \qquad \text{y} \qquad B\colon U \to [0,1]$$

definidos por

$$A(x) = \begin{cases} -\frac{2}{15}x + 1 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ \frac{3}{5} & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ -\frac{3}{25}x + \frac{6}{5} & \text{si } 5 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

para $x \in U$ y el gráfico de B es



Dibujar A, expresar analíticamente B y expresar analítica y gráficamente $A \cap B$ y B^c. ¿Cuál es el núcleo, frontera y soporte de cada uno de estos conjuntos? ¿Cuál es el grado de pertenencia del punto 2 al conjunto $A \cap B^c$?, ¿al conjunto $A^c \cup B$?.

Solución.

- Para B, se tiene que

$$B(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq x < 6 \\ 4 - \frac{x}{2} & \text{si } 6 \leq x < 8 \\ 0 & \text{si } 8 \leq x \leq 10. \end{cases}$$

- Para $A \cap B$, se tiene que

$$A \cap B(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{5}7 \\ -\frac{2}{15}x + 1 & \text{si } \frac{1}{5}7 \leq x < 3 \\ \frac{3}{5} & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ -\frac{3}{25}x + \frac{6}{5} & \text{si } 5 \leq x < \frac{140}{19} \\ 4 - \frac{x}{2} & \text{si } \frac{140}{19} \leq x < 8 \\ 0 & \text{si } 8 \leq x \leq 10, \end{cases}$$

- Para B^c, se tiene que

$$B(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{3}x & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 0 & \text{si } 3 \leq x < 6 \\ \frac{x}{2} - 3 & \text{si } 6 \leq x < 8 \\ 1 & \text{si } 8 \leq x \leq 10, \end{cases}$$

  por lo tanto su gráfica es

□

4. Se busca representar la idea de "el día templado", para lo cual se desea crear un conjunto difuso sobre el universo $U = [0, 30]$ que representa la temperatura promedio, en grados centígrados, del día. Dibujar y escribir un conjunto difuso que exprese la idea deseada.

Solución. Por ejemplo, definimos la función

$$A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 10 \\ \frac{8}{3} - \frac{x}{6} & \text{si } 10 \leq x < 16 \\ 0 & \text{si } 16 \leq x \leq 30 \end{cases}$$

□

5. Considere los universos $U = \{a, c, d\}$ y $V = \{w, x, y, z\}$. Dados los conjuntos difusos

$$A = \left\{ \frac{0,9}{a} + \frac{0,3}{c} + \frac{0,1}{d} \right\} \qquad B = \left\{ \frac{0,2}{x} + \frac{0,8}{y} + \frac{0,2}{z} \right\}.$$

Expresar los conjuntos $A \times B$ y $B \times A$ en forma matricial. ¿Cuál es el nivel de pertenencia de (x, d) a $A \times B$?, ¿el de (z, d) a $B \times A$?

Solución. Tenemos que

$$A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}2 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

Así, $B \times A(x,d) = 0{,}1$, mientras que no se puede calcular el nivel de pertenencia de (x,d) a $A \times B$.

$\square$

6. Mediremos el nivel de "afecto" que te tiene una persona en el universo $U = \{0,1,2,3,4,5\}$ donde 0 representa nada de afecto y 5 el máximo afecto. El conjunto A que representa la idea de que esa persona "te quiere" está dado por
$$A = \left\{ \frac{0{,}6}{3} + \frac{0{,}8}{4} + \frac{1{,}0}{5} \right\}.$$
El conjunto B que representa la idea de que esa persona "te odie" está dado por
$$B = \left\{ \frac{1{,}0}{0} + \frac{0{,}8}{1} + \frac{0{,}8}{2} + \frac{0{,}3}{3} \right\}.$$
Escribir y dibujar los conjuntos difusos que representen la idea de

   a) Te odia mucho.

   b) Te quiere poco.

   c) Ni te odia poco ni no te quiere mucho.

Solución.

- Te odia mucho.
$$B^2 = \left\{ \frac{1,0}{0} + \frac{0{,}64}{1} + \frac{0{,}64}{2} + \frac{0{,}09}{3} \right\}.$$
- Te quiere poco
$$\sqrt{A} = \left\{ \frac{0{,}77}{3} + \frac{0{,}89}{4} + \frac{1,0}{5} \right\}.$$
- Ni te odia poco ni no te quiere mucho
$$\text{mín}\{1 - \sqrt{A}, B^2\} = \left\{ \frac{1{,}0}{0} + \frac{0{,}64}{1} + \frac{0{,}64}{2} + \frac{0{,}09}{3} + \frac{0{,}11}{4} + \frac{0}{5} \right\}.$$

$\square$

Semestre 2019-2 Mat. Andrés Merino

1. ¿Qué significa que una relación difusa sea reflexiva?, ¿qué significa que sea simétrica?, ¿qué significa que sea transitiva?, ¿qué significa que sea de tolerancia?, ¿qué significa que sea de equivalencia?

Solución. Sea R una relación sobre un universo U, se tiene que

- R es reflexiva si $R(x,x) = 1$ para todo $x \in U$;
- R es simétrica si $R(x,y) = R(y,x)$
- R es transitiva si $R(x,y) \geq \text{mín}\{R(x,z), R(z,y)\}$ para todo $z \in U$
- R es de tolerancia si es reflexiva y simétrica.
- R es de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva. □

2. Suponga que las magnitudes de las tormentas se registran en una estación en un período de 24 horas. Representaremos nuestra evaluación del tamaño de una tormenta en el universo de agua precipitada $\{h_1, h_2, h_3\}$. Los datos sobre agua precipitada se basan en estimaciones estadísticas de los registros de lluvia. El conjunto difuso que representa que se tiene una "tormenta moderada" está dado por

$$F = \left\{ \frac{0{,}4}{h_1} + \frac{1{,}0}{h_2} + \frac{0{,}6}{h_3} \right\}.$$

Por otro lado, la duración de una tormenta esta dada en el universo $\{t_1, t_2\}$ y se representa que una tormenta es de "larga duración" con el conjunto

$$D = \left\{ \frac{0{,}1}{t_1} + \frac{1{,}0}{t_2} \right\}.$$

Determinar el conjunto que representa la relación entre el agua precipitada en una tormenta moderada y de larga duración.

Solución. Tenemos que

$$F \times D = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 1{,}0 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$ □

3. Dado el universo $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y los conjuntos

$$B = \left\{ \frac{0{,}1}{2} + \frac{0{,}3}{3} + \frac{0{,}6}{4} + \frac{0{,}8}{5} + \frac{1}{6} \right\}$$
$$C = \left\{ \frac{0{,}1}{1} + \frac{0{,}5}{2} + \frac{0{,}7}{3} + \frac{0{,}9}{4} + \frac{0{,}7}{5} + \frac{0{,}2}{6} \right\}.$$

Encontrar $B_{0,6}$, $C_{0,6}$ y $(B \cap C)_{0,6}$.

Solución. Se tiene que

$$B_{0,6} = \{4, 5, 6\}$$
$$C_{0,6} = \{3, 4, 5\}$$
$$(B \cap C)_{0,6} = B_{0,6} \cap C_{0,6} = \{4, 5\}.$$ □

4. Sea $\lambda \in [0,1]$, dado un universo U y A, B subconjunto difuso, demuestre o dé un contra ejemplo de los siguientes enunciados:

$$(A \cup B)_\lambda = A_\lambda \cup B_\lambda \qquad \text{y} \qquad (A^c)_\lambda = (A_\lambda)^c.$$

Solución.

- Es verdadero, en efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)_\lambda &\iff (A \cup B)(x) \geq \lambda \\ &\iff \text{máx}\{A(x), B(x)\} \geq \lambda \\ &\iff A(x) \geq \lambda \vee B(x) \geq \lambda \\ &\iff x \in A_\lambda \vee x \in B_\lambda \\ &\iff x \in A_\lambda \cup B_\lambda, \end{aligned}$$

  por lo tanto $(A \cup B)_\lambda = A_\lambda \cup B_\lambda$.

- Es falso, en efecto, consideremos el universo $U = \{1,2\}$ y el conjunto difuso

$$A = \left\{\frac{0{,}5}{1} + \frac{0{,}9}{2}\right\}.$$

  Tenemos que

$$A^c = \left\{\frac{0{,}5}{1} + \frac{0{,}1}{2}\right\},$$

  por lo tanto, tomando $\lambda = 0,5$, tenemos que

$$(A_{0{,}5})^c = \varnothing$$

  y

$$(A^c)_{0{,}5} = \{1\},$$

  de donde se sigue que $(A_{0{,}5})^c \neq (A^c)_{0{,}5}$. □

5. Considere los universos $U = \{a,b,c,d\}$, $V = \{x,y,z\}$ y $W = \{m,n,o,p\}$, además, las relaciones $R \subseteq V \times W$ y $S \subseteq U \times V$ dadas por

$$R = \begin{pmatrix} 0{,}0 & 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}0 \\ 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 1{,}0 & 0{,}2 & 0{,}9 & 0{,}7 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad S = \begin{pmatrix} 1{,}0 & 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}0 & 0{,}2 \\ 0{,}0 & 0{,}7 & 0{,}5 \\ 0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}9 \end{pmatrix}.$$

¿Qué conjunto puede formarse, $R \circ S$ o $S \circ R$? Calcule el que se puede formar.

Solución. Dado que $R \subseteq V \times W$ y $S \subseteq U \times V$, se puede formar $R \circ S$ ya que el universo de llegada de S es el mismo que el universo de llegada de R y se tiene que

$$R \circ S = S \cdot R = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}9 & 0{,}7 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, no se puede formar $S \circ R$ ya que el universo de llegada de R no es el mismo que el universo de llegada de S. □

6. Demostrar que

$$x \triangle y = \frac{xy}{2 - x - y + xy}$$

es una t-norma y que

$$\eta(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

es una negación. Finalmente, encontrar la t-conorma dual.

Solución. Probemos que $\triangle$ es una t-norma. Se tiene que

- $x\triangle 1 = \dfrac{x}{2-x-1+x} = x;$
- $x\triangle y = \dfrac{xy}{2-x-y+xy} = \dfrac{yx}{2-y-x+yx} = y\triangle x; y$
- $(x\triangle y)\triangle z = \dfrac{xyz}{4-2x-2y-2z+xy+xz+yz} = x\triangle(y\triangle z)$, por lo tanto $\triangle$ es una t-norma.

Ahora, probemos que η es una negación. Se tiene que

- Notemos que

  $$\eta(0) = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

  y

  $$\eta(1) = \frac{1-1}{1+1} = 0.$$

- Tenemos que

  $$\eta'(x) = -\frac{2}{x^2} < 0,$$

  por lo tanto η es decreciente.
- Finalmente, tenemos que

  $$\eta(\eta(x)) = \frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}} = x.$$

Así, tenemos que η es una negación.

La t-conorma dual está dada por

$$x \bigtriangledown y = \eta(\eta(x)\triangle\eta(y)) = \frac{2xy+x+y}{3xy+1}. \qquad \square$$

7. Dado el universo $U = \{-2,-1,0,1,2\}$ y los conjuntos

$$A = \left\{\frac{0{,}2}{-2} + \frac{1{,}0}{-1} + \frac{0{,}7}{0} + \frac{0{,}4}{1} + \frac{0{,}1}{2}\right\} \quad \text{y} \quad B = \left\{\frac{0{,}5}{-2} + \frac{0{,}8}{-1} + \frac{0{,}3}{0} + \frac{0{,}6}{1} + \frac{0{,}1}{2}\right\}$$

determinar $A \cap B$ y A^c, con las operaciones usuales y con las definidas por el literal anterior. Además, realizar los λ-corte en 0,5 en cada caso.

Solución. Con las operaciones usuales, tenemos que

$$A \cap B = \left\{\frac{0{,}2}{-2} + \frac{0{,}8}{-1} + \frac{0{,}3}{0} + \frac{0{,}4}{1} + \frac{0{,}1}{2}\right\}$$

y

$$A^c = \left\{\frac{0{,}8}{-2} + \frac{0{,}0}{-1} + \frac{0{,}3}{0} + \frac{0{,}6}{1} + \frac{0{,}9}{2}\right\},$$

por lo tanto, los λ-cortes en $0,5$ son

$$(A\cap B)_{0{,}5} = \{-1\} \qquad \text{y} \qquad (A^c)_{0{,}5} = \{-2,1,2\}.$$

Ahora, con las operaciones definidas en el literal anterior, tenemos que

$$(A \cap B)(x) = \frac{A(x)B(x)}{2 - A(x) - B(x) + A(x)B(x)}$$

y que

$$A^c(x) = \frac{1 - A(x)}{1 + A(x)},$$

con esto, tenemos que

$$A \cap B = \left\{ \frac{0{,}071}{-2} + \frac{0{,}800}{-1} + \frac{0{,}174}{0} + \frac{0{,}194}{1} + \frac{0{,}006}{2} \right\}$$

y

$$A^c = \left\{ \frac{0{,}667}{-2} + \frac{0{,}000}{-1} + \frac{0{,}176}{0} + \frac{0{,}429}{1} + \frac{0{,}818}{2} \right\},$$

por lo tanto, los λ-cortes en $0,5$ son

$$(A \cap B)_{0{,}5} = \{-1\} \qquad \text{y} \qquad (A^c)_{0{,}5} = \{-2, 2\}.$$

□

8. Dada una relación R reflexiva sobre un universo U, demuestre que para $\lambda \in [0,1]$, R_λ también es reflexiva.

Solución. Sea $\lambda \in [0,1]$, dado que R es reflexiva, tenemos que

$$R(x,x) = 1$$

para todo $x \in U$, se tiene que

$$\lambda \leq R(x,x),$$

por lo tanto,

$$(x,x) \in R_\lambda,$$

con lo cual, se tiene que R_λ es reflexiva. □

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICA
LÓGICA DIFUSA • TALLER NO. 04

Semestre 2019-2 Mat. Andrés Merino

1. Formalmente ¿qué es un conjunto difuso?, ¿para qué sirven? (1pt)

Solución. Un conjunto difuso es una función de un universo al intervalo $[0,1]$. □

2. ¿Cómo se comprueba que una relación difusa sea de equivalencia? (1pt)

Solución. Probando que la relación sea reflexiva, simétrica y transitiva. □

3. ¿Qué es la frontera de un conjunto difuso? (1pt)

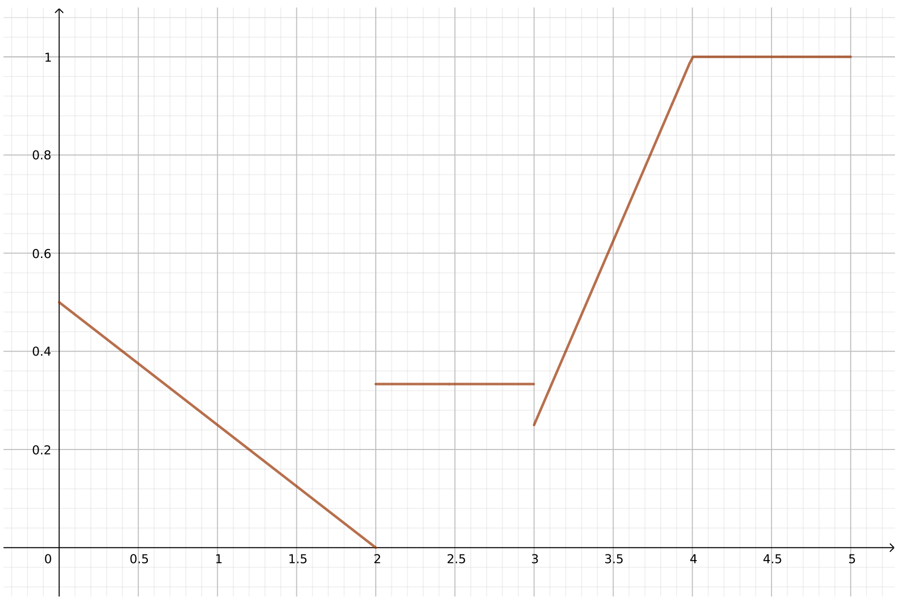
Solución. Si A es un conjunto difuso, su frontera es el conjunto $\{x \in U : 0 < A(x) < 1\}$. □

4. En el universo $U = [0,5]$ considere el siguiente conjunto difuso definido por

$$A(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{x}{4} & \text{si } 0 \leq x < 2, \\ \frac{1}{3} & \text{si } 2 \leq x < 3, \\ \frac{3x}{4} - 2 & \text{si } 3 \leq x < 4, \\ 1 & \text{si } 4 \leq x \leq 5, \end{cases}$$

Dibujarlo y encontrar $A_{0,4}$. (2pt)

Solución. La gráfica de A es la siguiente:



Tenemos que $A_{0,4} = [0, 0{,}4] \cup [3{,}2, 5]$. □

5. Del enunciado anterior, determinar A^c y $A^c \cup A$. Presentar ambos de manera gráfica y analítica. (3pt)

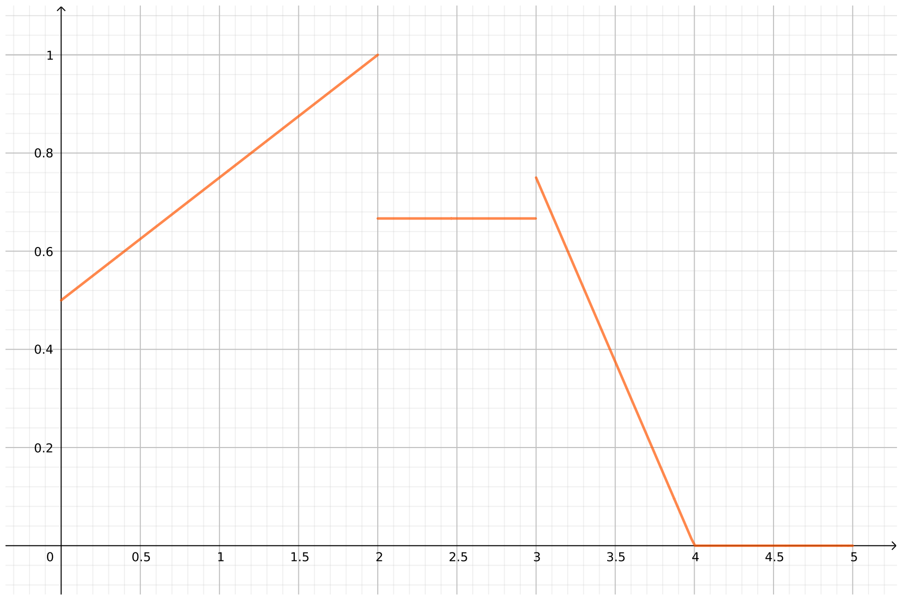
Solución. Se tiene que

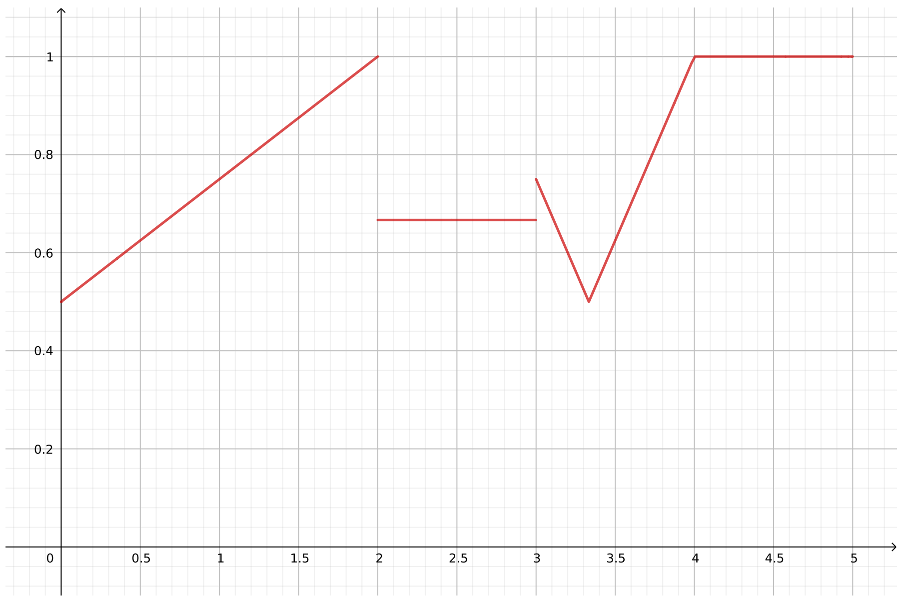
$$A^c(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < 2, \\ \frac{2}{3} & \text{si } 2 \leq x < 3, \\ 3 - \frac{3x}{4} & \text{si } 3 \leq x < 4, \\ 0 & \text{si } 4 \leq x \leq 5, \end{cases}$$

y

$$A^c \cup A(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < 2, \\ \frac{2}{3} & \text{si } 2 \leq x < 3, \\ 3 - \frac{3x}{4} & \text{si } 3 \leq x < \frac{10}{3}, \\ \frac{3x}{4} - 2 & \text{si } \frac{10}{3} \leq x < 4, \\ 1 & \text{si } 4 \leq x \leq 5, \end{cases}$$

y sus gráficas son, respectivamente, las siguientes:





□

6. Dados los universos $P = \{a, b, c\}$ y $Q = \{x, y\}$ se tiene los conjuntos (1.5pt)

$$A = \left\{ \frac{0{,}2}{a} + \frac{0{,}6}{b} \right\} \qquad B = \left\{ \frac{0{,}7}{a} + \frac{0{,}3}{b} \right\}$$
$$C = \left\{ \frac{0{,}4}{x} + \frac{0{,}8}{y} \right\}.$$

Determinar la relación asociada a la regla

R: A y B implica C.

Solución. Se tiene que

$$R = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 0{,}7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ □

7. Demostrar que (3pt)

$$x \triangle y = \frac{xy}{2 - (x + y - xy)}$$

es una $t-$norma y que

$$\eta(x) = 1 - x$$

es una negación. Finalmente, encontrar la $t-$conorma dual.

Solución. Notemos que

$$x \triangle 1 = \frac{x(1)}{2 - (x + 1 - x(1))} = x$$

y

$$x \triangle y = \frac{xy}{2 - (x + y - xy)} = \frac{yx}{2 - (y + x - yx)} = y \triangle x.$$

Además

$$\begin{aligned} x \triangle (y \triangle z) &= x \triangle \left(\frac{yz}{2 - (y + z - yz)} \right) \\ &= \frac{xyz}{xy + xz - 2x + yz - 2y - 2z + 4} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (x \triangle y) \triangle z &= \left(\frac{xy}{2 - (x + y - xy)} \right) \triangle z \\ &= \frac{xyz}{xy + xz - 2x + yz - 2y - 2z + 4}, \end{aligned}$$

por lo tanto $x \triangle (y \triangle z) = (x \triangle y) \triangle z$. Así, $\triangle$ es una $t-$norma.

La $t-$conorma dual es

$$\begin{aligned} a \nabla b &= \eta(\eta(a) \triangle \eta(b)) \\ &= \frac{2(1+x)(1+y) - (1-x)(1+y) - (1-y)(1+x)}{2(1+x)(1+y) - (1-x)(1+y) - (1-y)(1+x) + 2(1-x)(1-y)}. \end{aligned}$$ □

Por otra parte, tenemos que

$$\eta'(x) = -1 < 0,$$

lo que implica que *eta* es decreciente. Además $\eta(\eta(x)) = 1 - \eta(x) = 1 - (1 - x) = x$, lo que muestra que η es una negación.

8. Se hace una estudio de tres especies, estudiando en cada uno cuatro propiedades de manera difusa, con lo cual se tiene la siguiente tabla

	Propiedad 1	Propiedad 2	Propiedad 3	Propiedad 4
Especie 1	0.4	0.9	0.1	0.0
Especie 2	1.0	0.8	0.8	0.1
Especie 3	0.9	0.1	0.5	0.3

Elaborar la matriz de similaridad entre las especies a partir de estos datos. ¿Qué tanto se parece la especie 1 a la especie 3? Encontrar una matriz de equivalencia y realizar la clasificación difusa de estas especies. (4pt)

Solución. La matriz de similaridad es:

$$R = \begin{pmatrix} 1{,}0 & 0{,}8 & 0{,}47 \\ 0{,}8 & 1{,}0 & 0{,}87 \\ 0{,}47 & 0{,}87 & 1{,}0 \end{pmatrix},$$

de donde tenemos que la especie 1 se parece a la especie 3 en un 47 %.

Notemos que R es de tolerancia y además la matriz

$$R^2 = \begin{pmatrix} 1{,}0 & 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 1{,}0 & 0{,}87 \\ 0{,}8 & 0{,}87 & 1{,}0 \end{pmatrix},$$

es de equivalencia, por lo tanto es la matriz buscada. Finalmente, si tomamos $\lambda = 0{,}87$,

$$R^2_{0{,}87} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□