Fascículos de Matemática
del Proyecto CLAVEMAT

1 (2)

Análisis Matemático II

Apuntes de clase

2. Teoremas fundamentales en espacios de Banach

Proyecto CLAVEMAT

Fascículos de Matemática
del Proyecto CLAVEMAT

Proyecto CLAVEMAT

Análisis Matemático II

Apuntes de clase

2. Teoremas fundamentales en espacios de Banach

Fascículo de Matemática No. 1 (2)

ANÁLISIS MATEMÁTICO II: APUNTES DE CLASE
2. TEOREMAS FUNDAMENTALES EN ESPACIOS DE BANACH

PROYECTO CLAVEMAT

Escrito por: Andrés Merino - Andrés Miniguano
Responsable de la Edición: Andrés Merino
Revisión Académica: el texto aún no cuenta con revisión académica de pares

Registro de derecho autoral No.
ISBN: 978-0000-111-22

Publicado por el proyecto CLAVEMAT de la Escuela Politécnica Nacional, Ladrón de Guevara E11-253, Quito, Ecuador.

Primera edición: 2016
Primera impresión: 2016

Índice general

2. Teoremas fundamentales en espacios de Banach **3**

2.1. Lema de Zorn . . . 3

2.2. Teorema de Hahn-Banach . . . 5

2.3. Teorema de la acotación uniforme . . . 13

2.4. Teorema de la aplicación abierta . . . 19

2.5. Teorema del grafo cerrado . . . 23

2.6. Tópicos adicionales . . . 27

2.6.1. Operadores adjuntos en espacios de Banach . . . 27

2.6.2. Reflexividad . . . 29

2.6.3. Convergencias . . . 30

2.6.4. Teorema de Hahn-Banach, versiones geométricas . . . 34

2.7. Ejercicios propuestos . . . 42

2.8. Ejercicios resueltos . . . 44

PREFACIO

El presente libro es la recopilación de los apuntes de clase de la asignatura «Análisis Matemático II» dictada por el profesor Mat. Andrés Merino en la carrera de Matemática de la Escuela Politécnica Nacional, y recopilados por el estudiante Andrés Miniguano, el cual cursó la asignatura en el semestre referencial 2014-B.

Esta asignatura aborda los temas de Espacios de Hilbert, Teoremas Clásicos del Análisis y Cálculo en Espacios de Banach.

FASCÍCULO 2

TEOREMAS FUNDAMENTALES EN ESPACIOS DE BANACH

En este capítulo se estudiarán los Teoremas clásicos y fundamentales de los espacios de Banach, los cuatro Teoremas más importantes de este capítulo son: Teorema de Hahn-Banach, Teorema de Acotación Uniforme, Teorema de la Aplicación Abierta y Teorema del Grafo Cerrado.

El Teorema de Hahn-Banach trata sobre la extensión de funcionales lineales. Para esto, es preciso utilizar el Lema de Zorn, el cual es un resultado importante de Teoría de Conjuntos.

2.1. Lema de Zorn

El Lema de Zorn es un resultado fuerte sobre conjuntos bien ordenados, en esta sección se presentará este resultado, sin demostración, para lo cual son precisas las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN 2.1: Orden Parcial

Sea E un conjunto. Un orden parcial $\leq$ *sobre E es una relación sobre E si para todo $x, y, z \in E$ se cumple:*

- *$x \leq x$;*
- *$x \leq y$ y $y \leq x$ implica $x = y$; y*
- *$x \leq y$ y $y \leq z$ implica $x \leq z$.*

A un conjunto E, junto a un orden parcial $\leq$, se lo denomina *conjunto parcialmente ordenado*. El calificativo de "parcial" viene dado ya que pueden existir elementos x y y de E tales que no se cumpla $x \leq y$ ni $y \leq x$. A este tipo de elementos se los denomina *incomparables*. En cambio, si x y y son elementos de E tales que

$$x \leq y \qquad \text{o} \qquad y \leq x,$$

se dice que son *comparables*.

Si todos par de elementos de E son comparables, se dice que es un *orden total*. A un conjunto con dicho orden, se lo denomina *conjunto totalmente ordenado*. Además, en un conjunto parcialmente ordenado, se tiene el siguiente tipo especial de subconjuntos.

DEFINICIÓN 2.2: Cadena

Sean $\mathscr{C} \subseteq E$, donde E es un conjunto parcialmente ordenado. $\mathscr{C}$ se dice una cadena *si $\mathscr{C}$ es totalmente ordenado.*

Finalmente, se tiene los siguientes elementos destacables de un conjunto parcialmente ordenado.

DEFINICIÓN 2.3: Cota superior, Maximal

Sean $M \subseteq E$, E parcialmente ordenado y $u \in E$. Se dice que u es cota superior de M *si $x \leq u$ para todo $x \in M$.*

Se dice que u es maximal *si para $x \in M$:*

$$u \leq x \quad \textit{implica} \quad u = x.$$

Con estas definiciones, se puede enunciar exactamente el Lema de Zorn.

TEOREMA 2.1: Lema de Zorn

Sea $M \neq \varnothing$ un conjunto parcialmente ordenado. Supóngase que toda cadena de M tiene cota superior, entonces M tiene al menos un elemento maximal.

OBSERVACIÓN. Este resultado es equivalente al Axioma de elección, el cual dice que si $(A_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos no vacíos, con $I \neq \varnothing$, entonces

$$\prod_{i\in I} A_i = \left\{ f\colon I \to \bigcup_{i\in I} A_i : f(i) \in A_i, \text{ para todo } i \in I \right\} \neq \varnothing.$$

A continuación, veamos un ejemplo del uso de este resultado en el siguiente ejercicio.

EJERCICIO 2.1. Demostrar que todo espacio de Hilbert tiene una base de Hilbert.

Demostración. Sean H un Hilbert y

$$\mathcal{M} = \{M \subseteq H : M \text{ es ortogonal}\}.$$

Este conjunto es no vacío pues, para $x \in H$, $\{x\} \subseteq \mathcal{M}$. Además, es parcialmente ordenado por el orden $\subseteq$. Probaremos que cumple la hipótesis del Lema de Zorn.

Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}$ una cadena. Tomemos

$$M = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C.$$

Se tiene que M es ortogonal, pues sean $x, y \in M$ tales que $x \neq y$. Entonces existen $C_1,\ C_2 \in \mathscr{C}$ tales que

$$x \in C_1 \qquad \text{y} \qquad y \in C_2.$$

Como $\mathcal{C}$ es una cadena, podemos suponer que $C_1 \subseteq C_2$, entonces $x, y \in C_2$, por lo tanto $x \perp y$. Es decir, $M \in \mathcal{M}$, además, por la forma el la que está definido M, se tiene que es una cota superior.

Por lo tanto, se puede utilizar el Lema de Zorn, es decir, existe $\widetilde{M}$ un elemento maximal de $\mathcal{M}$. Con esto, se tiene que $\widetilde{M}$ es ortogonal. Debemos demostrar que también es total.

Supongamos que $\widetilde{M}^{\perp} \neq \{0\}$, entonces existe $x \in H$ con $x \neq 0$ tal que $x \perp \widetilde{M}$. Sea

$$M' = \widetilde{M} \cup \{x\}$$

este conjunto es elemento de $\mathcal{M}$ y es claro que $\widetilde{M} \subsetneq M'$, lo cual contradice que $\widetilde{M}$ es maximal. Por lo tanto, $\widetilde{M}$ es total. Es decir, $\widetilde{M}$ es base de Hilbert. $\square$

2.2. Teorema de Hahn-Banach

El Teorema de Hahn-Banach es un Teorema de extensión de funcionales lineales en espacios normados. Este Teorema nos darán herramientas potentes para trabajar con los espacios duales. Para esto necesitamos un cierto tipo de acotación, que será dada por funcionales sublineales. Por lo tanto, se tiene la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.4

Sea E un espacio vectorial real. Una función $p\colon E \to \mathbb{R}$ se dice

- subaditiva *si $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, para todo $x, y \in E$;*
- positiva-homogénea *si $p(\alpha x) \leq \alpha p(x)$, para todo $x \in E$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$; y*
- sublineal *si es subaditiva y positiva-homogénea.*

Además, dado un espacio vectorial E, F y G dos subespacios vectoriales de E y $f\colon F \to \mathbb{R}$, $g\colon G \to \mathbb{R}$ funciones lineales, se dirá que f *extiende* a g o que f es *una extensión lineal* de g si $F \subseteq G$ y $f(x) = g(x)$ para todo $x \in F$. Con esto, se tiene el enunciado del siguiente teorema.

TEOREMA 2.2: Hahn-Banach, extensión de funcionales

Sean E un espacio vectorial real, $p\colon E \to \mathbb{R}$ una función sublineal, $F \subseteq E$ subespacio vectorial y $f\colon F \to \mathbb{R}$ una función lineal tales que

$$f(x) \leq p(x)$$

para todo $x \in F$. Entonces, existe $\widetilde{f}\colon E \to \mathbb{R}$ una extensión lineal de f tal que

$$\widetilde{f}(x) \leq p(x),$$

para todo $x \in E$.

Demostración. Definamos

$$\mathscr{E} = \{g\colon \operatorname{dom}(g) \to \mathbb{R} : g \text{ extiende a } f \text{ y } g(x) \leq p(x), \text{ para todo } x \in \operatorname{dom}(g)\}.$$

Definimos en $\mathscr{E}$ un orden parcial. Para $g_1, g_2 \in \mathscr{E}$, decimos que $g_1 \leq g_2$ si y sólo si g_2 extiende a g_1.

Verifiquemos que $\mathscr{E}$ cumple las hipótesis del Lema de Zorn. Para ello, sea $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{E}$ una cadena y sea

$$\begin{aligned} g\colon \bigcup_{\widetilde{g}\in\mathscr{C}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = g_1(x) \end{aligned}$$

con $x \in \operatorname{dom}(g_1)$ para algún $g_1 \in \mathscr{C}$. Tenemos las siguientes propiedades:

- g **es función:** Si $x \in \operatorname{dom}(g_1)$ y $x \in \operatorname{dom}(g_2)$, para $g_1, g_2 \in \mathscr{C}$, se tiene que $g_1 \leq g_2$ pues $\mathscr{C}$ es una cadena; es decir, g_1 extiende a g_2; por lo tanto $g_1(x) = g_2(x)$.
- g **es lineal:** Sean $x, y \in \operatorname{dom}(g)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.
  - Tenemos que $\alpha x \in \operatorname{dom}(\widetilde{g})$ para algún $\widetilde{g} \in \mathscr{C}$ y entonces $g(\alpha x) = \widetilde{g}(\alpha x) = \alpha \widetilde{g}(x) = \alpha g(x)$.
  - $g(x+y) = g_1(x+y) = g_1(x) + g_1(y) = g(x) + g(y)$, esto se hace sin pérdida de generalidad puesto que si $x \in \operatorname{dom}(g_1)$ y $y \in \operatorname{dom}(g_2)$, entonces basta suponer $g_1 \leq g_2$.
- g **es una extensión de** f**:** Sea $g_1 \in \mathscr{C}$, se tiene que

  $$F \subseteq \operatorname{dom}(g_1) \subseteq \bigcup_{\widetilde{g} \in \mathscr{C}} \operatorname{dom}(\widetilde{g}) = \operatorname{dom}(g),$$

  y si $x \in F$; entonces $x \in \operatorname{dom}(g_1)$ para algún $g_1 \in \mathscr{C} \subseteq \mathscr{E}$, entonces g extiende a f; de donde

  $$g(x) = g_1(x) = f(x).$$

- g **está acotada por** p**:** Sea $x \in \operatorname{dom}(g)$, entonces $x \in \operatorname{dom}(g_1)$, para algún $g_1 \in \mathscr{C} \subseteq \mathscr{E}$. Luego

  $$g(x) = g_1(x) \leq p(x),$$

  por lo tanto $g(x) \leq p(x)$.

Con esto, se concluye que $g \in \mathscr{E}$ y es cota superior de $\mathscr{C}$, por lo tanto podemos aplicar el Lema de Zorn a $\mathscr{E}$.

Sea $\widetilde{f}$ un elemento maximal de $\mathscr{E}$. Veremos que $\operatorname{dom}(\widetilde{f}) = E$, para lo cual supongamos que $\operatorname{dom}(\widetilde{f}) \neq E$, es decir, supongamos que existe $y_1 \in E$ tal que $y_1 \notin \operatorname{dom}(\widetilde{f})$. Definimos $F_1 = \operatorname{span}\left(\operatorname{dom}(\widetilde{f}) \cup \{y_1\}\right)$, así obtenemos que si $x \in F_1$, este puede escribirse como

$$x = y + \alpha y_1,$$

donde $y \in \operatorname{dom}(\widetilde{f})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sea

$$\begin{aligned} g\colon F_1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = \widetilde{f}(y) + \alpha c, \end{aligned}$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es una constante a determinar. Es inmediato que g es lineal. Observemos que g extiende a $\widetilde{f}$, es claro que

$$F \subseteq \operatorname{span}\left(\operatorname{dom}\left(\widetilde{f}\right) \cup \{y_1\}\right) = F_1.$$

Además, si $x \in F$, tenemos que $x \in \operatorname{dom}\left(\widetilde{f}\right)$, por tanto $g(x) = \widetilde{f}(x)$. Es decir, en efecto g es extensión de $\widetilde{f}$.

Ahora, busquemos un valor adecuado de c para que $g(x) \leq p(x)$ para todo $x \in F$. Sean $u, v \in \operatorname{dom}(\widetilde{f})$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(u) - \widetilde{f}(v) &= \widetilde{f}(u - v) \\
&\leq p(u - v) \\
&= p(u + y_1 - y_1 - v) \\
&\leq p(u + y_1) + p(-y_1 - v),
\end{aligned}$$

de donde

$$-p(-y_1 - v) - f(v) \leq p(u + y_1) - \widetilde{f}(u);$$

y dado que u y v son arbitrarios, se tiene que

$$\underbrace{\sup_{v \in \operatorname{dom}(\widetilde{f})} \left[-p(-y_1 - v) - \widetilde{f}(v)\right]}_{m_0} \leq \underbrace{\inf_{u \in \operatorname{dom}(\widetilde{f})} \left[p(u + y_1) - \widetilde{f}(u)\right]}_{m_1}.$$

Tomemos $c \in \mathbb{R}$ tal que $m_0 \leq c \leq m_1$. Luego, para todo $z \in \operatorname{dom}(\widetilde{f})$, se tiene que

$$-p(-y_1 - z) - \widetilde{f}(z) \leq c$$

y

$$c \leq p(z + y_1) - \widetilde{f}(z).$$

Sea $x \in F_1$, recordemos que $x = y + \alpha y_1$, con $y \in \operatorname{dom}(\widetilde{f})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Tenemos los siguientes casos:

- Si $\alpha < 0$ entonces $\alpha^{-1} y \in \operatorname{dom}(\widetilde{f})$, obteniendo

  $$-p(-y_1 - \alpha^{-1} y) - \widetilde{f}(\alpha^{-1} y) \leq c,$$

  de donde

  $$\alpha p(-y_1 - \alpha^{-1} y) + \alpha \widetilde{f}(\alpha^{-1} y) \leq -\alpha c,$$

es decir
$$\widetilde{f}(y) + \alpha c \leq -\alpha p(-y_1 - \alpha^{-1}y) = p(y + \alpha y_1),$$
por lo tanto
$$g(x) \leq p(x).$$

- Si $\alpha = 0$ entonces $g(x) = \widetilde{f}(y) \leq p(x)$.
- Si $\alpha > 0$ entonces
$$c \leq p(\alpha^{-1}y + y_1) - \widetilde{f}(\alpha^{-1}y)$$
y
$$\alpha c \leq \alpha p(\alpha^{-1}y + y_1) - \alpha \widetilde{f}(\alpha^{-1}y)$$
de donde obtenemos que
$$g(x) = \widetilde{f}(y) + \alpha c \leq p(y + \alpha y_1) = p(x).$$

Así, obtenemos que $g \in \mathscr{E}$ y extiende a $\widetilde{f}$, lo cual no es posible dado que $\widetilde{f}$ es maximal. Por tanto, necesariamente se tiene que $\mathrm{dom}(\widetilde{f}) = E$. □

En el anterior Teorema, es necesaria una función sublineal, la cual sólo está definida en un espacio vectorial real. Ahora, vamos a generalizar este Teorema a un $\mathbb{K}$ espacio vectorial, donde ya no tendremos una función sublineal.

TEOREMA 2.3: Hahn-Banach, generalizado

Sean E un espacio vectorial, $p\colon E \to \mathbb{R}$ subaditiva tal que
$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x),$$
para todo $x \in E$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Además, sean $F \subseteq E$ subespacio vectorial y $f \in F^{\times}$ tal que
$$\left|f(x)\right| \leq p(x)$$
para todo $x \in F$. Entonces existe $\widetilde{f} \in E^{\times}$ una extensión lineal de f, tal que
$$\left|\widetilde{f}(x)\right| \leq p(x),$$
para todo $x \in E$.

Demostración.

- **Caso real:**

Notemos que p es sublineal, pues para todo $x \in F$:

$$f(x) \leq \left|f(x)\right| \leq p(x).$$

Por Hahn-Banach, existe $\widetilde{f} \in E^{\times}$, una extensión de f, tal que $\widetilde{f}(x) \leq p(x)$, para todo $x \in E$.

Luego,

$$-\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(-x) \leq p(-x) = |-1|p(x) = p(x),$$

entonces $-p(x) \leq \widetilde{f}(x)$. Por lo tanto, $|\widetilde{f}(x)| \leq p(x)$.

- **Caso complejo:**

  Notemos que a f la podemos separar en su parte real e imaginaria:

  $$f(x) = f_1(x) + if_2(x),$$

  donde $f_i \colon F_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ para $i \in [\![1,2]\!]$, y es claro que $f_1 \in F_{\mathbb{R}}^{\times}$.

  Por Hahn-Banach, existe $\widetilde{f}_1 \in E_{\mathbb{R}}^{\times}$ que extiende a f_1 y

  $$\widetilde{f}_1(x) \leq p(x),$$

  para todo $x \in E$.

  Determinemos una relación entre f_1 y f_2. Para ello, consideremos la expresión anterior para f. Al hacer el producto con la unidad imaginaria se tiene que

  $$-f_2(x) + if_1(x) = i\left[f_1(x) + if_2(x)\right] = if(x) = f(ix) = f_1(ix) + if_2(ix),$$

  por lo tanto $f_2(x) = -f_1(ix)$.

  Ahora, sea

  $$\begin{aligned} \widetilde{f} \colon E &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \widetilde{f}(x) = \widetilde{f}_1(x) - i\widetilde{f}_1(ix) \end{aligned}$$

  Esta función tiene las siguientes propiedades:

  - **$\widetilde{f}$ es lineal:**

    Sean $x, y \in E$. Tenemos que

    $$\begin{aligned} \widetilde{f}(x+y) &= \widetilde{f}_1(x+y) - i\widetilde{f}_1(ix+iy) \\ &= \widetilde{f}_1(x) + \widetilde{f}_1(y) - i\widetilde{f}_1(ix) - i\widetilde{f}(iy) \\ &= \widetilde{f}(x) + \widetilde{f}(y), \end{aligned}$$

pues $\widetilde{f} \in E^{\times}$. Además, para $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$, con $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(\alpha x) &= \widetilde{f}_1(\alpha)(x) - i\widetilde{f}_1(i\alpha x) \\
&= \widetilde{f}_1(ax + ibx) - i\widetilde{f}_1(iax - bx) \\
&= a\widetilde{f}_1(x) + b\widetilde{f}_1(ix) - ai\widetilde{f}_1(ix) + ib\widetilde{f}_1(x) \\
&= (a + ib)\widetilde{f}_1(x) - (a + ib)i\widetilde{f}_1(ix) \\
&= (a + ib)\left[\widetilde{f}_1(x) - i\widetilde{f}_1(ix)\right] = \alpha\widetilde{f}(x).
\end{aligned}$$

- p **mayora a** f**:**

  Recordemos que para todo $z \in \mathbb{C}$, se tiene que $z = |z|e^{i\theta}$. Luego

  $$\widetilde{f}(x) = \left|\widetilde{f}(x)\right| e^{i\theta},$$

  de donde

  $$\left|\widetilde{f}(x)\right| = e^{-i\theta}\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}\left(e^{-i\theta}x\right) = \widetilde{f}_1\left(e^{-i\theta}x\right) - i\widetilde{f}_1\left(ie^{-i\theta}x\right)$$

  pero $i\widetilde{f}_1\left(ie^{-i\theta}x\right)$ es cero pues $\left|\widetilde{f}(x)\right| \in \mathbb{R}$. Por lo tanto

  $$\left|\widetilde{f}(x)\right| \leq p\left(e^{-i\theta}x\right) = \left|e^{-i\theta}x\right| p(x) = p(x),$$

  de donde se sigue el resultado. □

A continuación veremos la primera aplicación del Teorema de Hahn-Banach en el dual de un espacio vectorial.

TEOREMA 2.4: Hahn-Banach, espacios normados

Sean E un espacio vectorial normado, F un subespacio vectorial de E y $f \in F^*$. Entonces existe $\widetilde{f} \in E^*$, extensión de f, tal que

$$\left\|\widetilde{f}\right\|_{E^*} = \|f\|_{F^*}.$$

Demostración. Si $F = \{0\}$, entonces $f = 0$ y su extensión es la aplicación nula. Por otro lado, si $F \neq \{0\}$, entonces existe $z \in F \setminus \{0\}$ tal que

$$\left|f(z)\right| \leq \|f\|_{F^*}\|z\|.$$

Definamos $p(x) := \|f\|_{F^*}\|x\|$ pE roso $x \in E$, se tiene que p es subaditiva y $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$.

Por Hahn-Banach, existe $\widetilde{f} \in E^{\times}$ tal que $\widetilde{f}$ extiende a f y $|\widetilde{f}(x)| \leq p(x)$, para todo $x \in E$. Por lo tanto

$$\left|\widetilde{f}(x)\right| \leq \|f\|_{F^*}\|x\|,$$

entonces $\widetilde{f} \in E^*$ y $\left\|\widetilde{f}\right\|_{E^*} \leq \|f\|_{F^*}$.

Por definición, tenemos que $\|f\|_{F^*} = \sup\limits_{\substack{x\in F,\\ \|x\|=1}} |f(x)|$, entonces

$$\left\|\widetilde{f}\right\|_{E^*} = \sup_{\substack{x\in E,\\ \|x\|=1}} \left|\widetilde{f}(x)\right| \geq \sup_{\substack{x\in F,\\ \|x\|=1}} \left|\widetilde{f}(x)\right| = \sup_{\substack{x\in F,\\ \|x\|=1}} \left|f(x)\right| = \|f\|_{F^*}.$$

Luego $\left\|\widetilde{f}\right\|_{E^*} \geq \|f\|_{F^*}$ y finalmente se tiene que $\left\|\widetilde{f}\right\|_{E^*} = \|f\|_{F^*}$. □

Gracias a este Teorema podemos demostrar que existen funcionales lineales no triviales en un espacio vectorial de cualquier dimensión.

TEOREMA 2.5

Sean E un espacio vectorial normado y $x_0 \in E \setminus \{0\}$, entonces existe $\widetilde{f} \in E^*$ tal que

$$\|\widetilde{f}\| = 1 \quad y \quad \widetilde{f}(x_0) = \|x_0\|.$$

Demostración. Sean $F = \operatorname{span}(\{x_0\}) = \{\alpha x_0 : \alpha \in \mathbb{K}\}$ y

$$\begin{aligned} f\colon F &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto f(x) = \alpha\|x_0\|. \end{aligned}$$

Es claro que esta función es lineal. Además, para todo $x \in F$, existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que

$$\left|f(x)\right| = |\alpha|\|x_0\|| = \|\alpha x_0\| = \|x\|,$$

por tanto $\|f\|_{F^*} = 1$. Luego, por Hahn-Banach, existe $\widetilde{f} \in E^*$ tal que $\widetilde{f}_F = f$ y

$$\|\widetilde{f}\|_{E^*} = \|f\|_{F^*} = 1.$$

Por último, es claro que $\widetilde{f}(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$. □

A continuación tenemos un corolario que es de utilidad en varias áreas de la matemática, como es el caso del análisis convexo.

COROLARIO 2.6 (Vector no nulo)**.** Sea E un espacio vectorial normado, entonces para todo $x \in E$:

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in E^* \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

Además, si $f(x) = 0$ para todo $f \in E^*$, entonces $x = 0$.

Demostración. Sea $f \in E^* \setminus \{0\}$, se tiene que

$$\big|f(x)\big| \leq \|f\|\|x\|,$$

por tanto

$$\sup_{\substack{f \in E^* \\ f \neq 0}} \frac{\big|f(x)\big|}{\|f\|} \leq \|x\|.$$

Ahora, para $x \in E \setminus \{0\}$, sabemos que existe $\widetilde{f} \in E^*$ tal que $\|\widetilde{f}\| = 1$ y $\widetilde{f}(x) = \|x\|$, luego

$$\sup_{\substack{f \in E^* \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \geq \frac{|\widetilde{f}(x)|}{\|\widetilde{f}\|} = \frac{\|x\|}{1} = \|x\|.$$

Obteniéndose así el resultado. □

Cabe recalcar que en ninguno de estos Teoremas se impuso condiciones sobre la completitud del espacio; es decir, los Teoremas de Hahn-Banach se cumplen para cualquier espacio vectorial. Además, el último resultado nos revela el dualismo entre E, un subespacio vectorial, y E^* en la forma de calcular normas, pues, para $x \in E$ y $f \in E^*$, se tiene:

$$\|x\|_E = \sup_{\substack{f \in E^* \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \quad \text{y} \quad \|f\|_{E^*} = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|_E}.$$

2.3. Teorema de la acotación uniforme

DEFINICIÓN 2.5

Sean $X \neq \varnothing$ un espacio métrico y $M \subseteq X$.

1. *M se dice* denso en ninguna parte *(raro o diseminado) si $\overline{M}$ no tiene puntos interiores; es decir, si*

$$\operatorname{int}(\overline{M}) = \varnothing.$$

2. *M se dice de* primera categoría *si es la unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte.*

3. *M se dice de* segunda categoría *si no es de primera categoría.*

EJEMPLO 2.1. En $\mathbb{R}$ tenemos los siguientes conjuntos que ilustran estos conceptos:

- Para $x \in \mathbb{R}$, $\{x\}$ es denso en ninguna parte.
- Para $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ en $\mathbb{R}$, $\bigcup_{i=0}^{n}\{x_i\}$ es denso en ninguna parte; es decir, todo conjunto finito es denso en ninguna parte.
- $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ es denso en ninguna parte.
- $\mathbb{N}$ es denso en ninguna parte.
- El conjunto triádico de Cantor es denso en ninguna parte.
- $\bigcup_{x\in\mathbb{Q}}\{x\} = \mathbb{Q}$ es de primera categoría, pero $\mathbb{Q}$ no es denso en ninguna parte.
- $\mathbb{R}$ es de segunda categoría.
- Un conjunto es denso en sí mismo pero no es denso en ninguna parte de sí mismo, puesto que en un espacio métrico

$$\operatorname{int}(\overline{X}) = X.$$

A continuación veremos el Teorema de la categoría de Baire. El resultado lo veremos desde una perspectiva de espacios métricos, pero cabe mencionar que existen generalizaciones a cierta clase de espacios topológicos.

TEOREMA 2.7: Categoría de Baire, espacios métricos

Si $X \neq \varnothing$ es un espacio métrico completo, entonces es de segunda catego-

> *ría. Es decir, si $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k$, con M_k cerrados, entonces al menos uno de los M_k tiene interior no vacío.*

Demostración. Supongamos que X es de primera categoría; es decir,

$$X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k$$

con M_k densos en ninguna parte. Por tanto $\operatorname{int}\left(\overline{M_k}\right) = \varnothing$ para todo $k \in \mathbb{N}$, pero $\operatorname{int}(X) = X \neq \varnothing$, por lo que, en particular $\operatorname{int}\left(\overline{M_1}\right) \neq \operatorname{int}(X)$; de donde $\overline{M_1} \neq X$ y se tiene que $\overline{M_1}^c$ es un conjunto abierto y no vacío.

Sea $p_1 \in \overline{M_1}^c$. Sabemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $p_1 \in B(p_1;\varepsilon) \subseteq \overline{M_1}^c$, por lo que podemos tomar $\varepsilon_1 = \text{mín}\{\varepsilon/2, 1/4\}$ y es claro que

$$p_1 \in B(p_1;\varepsilon_1) \subseteq \overline{M_1}^c.$$

Definimos $B_1 := B(p_1;\varepsilon_1)$, este conjunto no está contenido en $\overline{M_2}$ pues sabemos que $\operatorname{int}(\overline{M_2}) = \varnothing$, entonces $B\left(p_1;\varepsilon_1/2\right) \nsubseteq \overline{M_2}$. Luego $\overline{M_2}^c \cap B\left(p_1;\varepsilon_1/2\right) \neq \varnothing$ es abierto. Por lo tanto, existen $p_2 \in X$ y $\varepsilon_2 > 0$, con $\varepsilon_2 < \text{mín}\{\varepsilon_1/2, 1/4\}$ tales que

$$p_2 \in B\left(p_2;\varepsilon_2\right) \subseteq \overline{M_2}^c \cap B\left(p_1;\varepsilon_1/2\right)$$

Por recursión finita, definimos $B_k := B\left(p_k;\varepsilon_k/2\right)$, luego $B_k \cap M_k = \varnothing$ y $p_{k+1} \in B_{k+1} \subseteq B\left(p_k;\frac{\varepsilon_k}{2}\right) = B_k$, con $\varepsilon_k < 1/2^k$.

Así, hemos encontrado una sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en la sucesión de conjuntos $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y para $m > n$ tenemos que $B_m \subseteq Bn$ y además

$$d(p_n, p_m) < \frac{1}{2}\varepsilon_n < \frac{1}{2^{n+1}} \to 0,$$

entonces $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Por lo tanto, existe $p \in X$ tal que $p_n \to p$. Además

$$d(p_m, p) \leq d(p_m, p_n) + d(p_n, p) < \frac{1}{2}\varepsilon_m + d(p_n, p).$$

Entonces, cuando $n \to +\infty$, se tiene $d(p_m, p) \leq \varepsilon_m/2 < \varepsilon_m$. Luego $p \in B_m$, lo cual implica que $p \notin M_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, tenemos que $p \notin \bigcup_{m\in\mathbb{N}} M_m = X$ lo cual es imposible.

Luego, X es de segunda categoría. $\square$

A continuación, veremos la aplicación más conocida del Teorema de Baire.

TEOREMA 2.8: Acotación uniforme

Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $(T_n)_{n\in N}$ una sucesión en $\mathcal{L}(X,Y)$ tal que, para cada $x \in X$, existe $c_x > 0$ tal que

$$\|T_n x\| < c_x,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, existe $\widetilde{c} \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|T_n\| < \widetilde{c},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Para $k \in \mathbb{N}$, definimos

$$A_k := \{x \in X : \|T_n x\| \leq k, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Tenemos que $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$, pues si $x \in X$, entonces $\|T_n x\| < c_x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego

$$\|T_n x\| < c_x < k_0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y para algún $k_0 \in \mathbb{N}$; entonces $x \in A_{k_0}$.

Veamos que los conjuntos A_k son cerrados. Sean $k \in \mathbb{N}$ y $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión en A_k tal que $x_n \to x \in X$. Se tiene que para todo $n, j \in \mathbb{N}$

$$\|T_n x_j\| \leq k,$$

por lo que, si $j \to +\infty$,

$$\|T_n x\| \leq k.$$

Luego, $x \in A_k$ y, por tanto, A_k es cerrado.

Entonces X es un espacio completo expresado como unión numerable de cerrados. Por el Teorema de la categoría de Baire, al menos uno de estos debe tener interior no vacío. Sea $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\operatorname{int}(A_{k_0}) \neq \varnothing$, entonces existe $x_0 \in A_{k_0}$ y $r > 0$ tales que $B(x_0; r) \subseteq A_{k_0}$.

Sea $x \in X \setminus \{0\}$, definimos

$$z := x_0 + \gamma x, \quad \text{donde} \quad \gamma = \frac{r}{2\|x\|}.$$

Se tiene que

$$\|z - x_0\| = \|\gamma x\| = \frac{r}{2\|x\|}\,\|x\| = \frac{r}{2} < r,$$

por tanto $z \in B(x_0; r)$ y luego para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\|T_n x\| = \left\| T_n\left(\frac{1}{\gamma}(z - x_0)\right)\right\| = \frac{1}{\gamma}\,\|T_n z - T_n x_0\|$$

y usando la desigualdad triangular

$$\|T_n x\| \leq \frac{1}{\gamma}\big(\,\|T_n z\| + \|T_n x_0\|\,\big)$$

pero teníamos que $x_0, z \in B(x_0; r) \subseteq A_{k_0}$, por lo tanto

$$\|T_n x\| \leq \frac{1}{\gamma}(k_0 + k_0) = \frac{2k_0}{\gamma} = \frac{4k_0}{r}\|x\|.$$

Entonces $\|T_n\| \leq \frac{4k_0}{r}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Veremos a continuación un ejemplo práctico de la utilidad de este teorema al resolver el siguiente ejercicio.

EJERCICIO 2.2. Sea X el espacio de los polinomios reales, $\mathbb{R}[x]$, con la norma

$$\|p\| = \left\|\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i\right\| = \max_{0\leq i\leq n} |\alpha_i|.$$

¿Es X completo?

Solución. Sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de $\mathbb{R}[x]$ en $\mathbb{R}$ tales que $T_n(0) = 0$ y que para todo $n, m \in \mathbb{N}$

$$T_n\left(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i.$$

Esta sucesión tiene las siguientes propiedades.

1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $T_n \in \mathbb{R}[x]^*$. Sea $n \in \mathbb{N}$. En efecto, para todo $p, q \in \mathbb{R}[x]$ y $\beta \in \mathbb{R}$, con $p = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i x^i$ y $q = \sum_{i=0}^{m} c_i x^i$; tenemos que

$$T_n(\beta p + q) = T_n\left(\sum_{i=0}^{m} \beta\alpha_i x^i + c_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\beta\alpha_i + c_i\right) = \beta\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i + \sum_{i=0}^{n-1} c_i = \beta T_n(p) + T$$

Por lo tanto, T_n es lineal.

Ahora, supongamos que $p \in \mathbb{R}[x]$, con $p = \sum_{i=0}^{N_p} \alpha_i x^i$. Tenemos que, tomando $M_p = \text{mín}\{n-1, N_p\}$,

$$\|T_n p\| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i\right| = \sum_{i=0}^{M_p} |\alpha_i| \leq \sum_{i=0}^{M_p} \max_{0\leq j\leq N_p} |\alpha_j| \leq M_p \max_{0\leq j\leq N_p} |\alpha_j| \leq M_p\|p\|.$$

Luego, como esto sucede para cada $p \in \mathbb{R}[x]$, se sigue que $\|T_n\| \leq N_p + 1$ ó $\|T_n\| \leq n$. Es decir, $T_n \in X^*$ y por tanto $\|T_n p\| \leq M_p$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Para todo $c \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n\| > c$. En efecto, sean $n \in \mathbb{N}$ y $p_n = \sum_{i=0}^{n} x^i \in \mathbb{R}[x]$. Es claro que $\|p\| = 1$ y además

$$|T_n p_n| = n.$$

Luego

$$\sup_{\substack{p\in X\\ p\neq 0}} \frac{|T_n(p)|}{\|p\|} \geq \frac{|T_n p_n|}{\|p_n\|} = n.$$

Por tanto $\|T_n\| \geq n$, lo cual implica que X no es completo. □

Ahora, utilicemos este teorema para la resolución de un par de ejercicios.

> **EJERCICIO 2.3.** Sean E un espacio vectorial normado y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E tal que $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada para toda $f \in E^*$. Demostrar que $\big(\|x_n\|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.

Demostración. Para $x_n \in E$, tomamos $g_n \in E^{**}$ tal que $g_n(f) = f(x_n)$. Además, se tiene que

$$\|g_n\| = \sup_{\substack{f\in E^*\\ f\neq 0}} \frac{|g_n(f)|}{\|f\|} = \sup_{\substack{f\in E^*\\ f\neq 0}} \frac{|f(x_n)|}{\|f\|} = \|x_n\|.$$

Por otro lado, para $f \in E^*$, $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada; es decir, existe $c_f \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x_n)| < c_f,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto es equivalente a

$$\left| g_n(f) \right| < c_f,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, como x^* es de Banach, por el Teorema de acotación uniforme, $\left(\|g_n\| \right)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado, lo cual implica que $\left(\|x_n\| \right)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado. □

EJERCICIO 2.4. Sean E un espacio de Banach, Y un espacio normado y $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{L}(X,Y)$ tal que $\|T_n\| \to +\infty$. Demostrar que existe $x \in X$ tal que $\|T_n x\| \to +\infty$.

Demostración. Supongamos que no existe dicho x, entonces los términos $\|T_n x\|$ están acotados para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema de la acotación uniforme, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, lo cual es contradictorio. □

2.4. Teorema de la aplicación abierta

En esta sección demostraremos el conocido Teorema de la aplicación abierta. Este teorema es de gran utilidad para demostrar cuándo la inversa de una aplicación continua también es continua. Para ello necesitaremos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.6

Sean E, F espacios vectoriales normados. Una aplicación $T\colon E \to F$ se dice abierta *si para todo abierto $A \subseteq E$, se tiene que $T(A)$ es abierto en F.*

Recordemos que si E es un espacio vectorial normado, $A \subseteq E$, $x \in E$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, se pueden definir de manera natural los siguientes conjuntos

$$\alpha A := \{\alpha x : x \in A\}$$

y

$$x + A := \{x + a : a \in A\}.$$

OBSERVACIÓN (Notación)**.** En adelante, para $r > 0$, notaremos a la bola $B_E(0_E; r)$ por $B_E(r)$.

Además, es fácil ver que, para $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$,

$$\alpha B_E(r) = B_E\big(|\alpha| r\big),$$

pues, dado que $\{\alpha x : x \in B_E(r)\} = \{\alpha x : \|x\|_E < r\}$, tenemos que

$$\alpha B_E(r) = \left\{ y : \left\| \frac{1}{\alpha} y \right\| < r \right\} = \{y : \|y\| < |\alpha| r\} = B_E\big(|\alpha| r\big).$$

También, es bueno notar que, para $x \in E$,

$$B_E(x;r) - x = B_E(r),$$

puesto que $B_E(x;r) - x = \{a - x : a \in B_E(x,r)\}$ y entonces

$$B_E(x;r) - x = \{a - x : \|x - a\| < r\} = \{y : \|y\| < r\} = B_E(r).$$

Para facilitar la demostración del teorema principal de esta sección, se empezará con la demostración del siguiente lema.

> **LEMA 2.9.** Sean E, F espacios de Banach y $T \in \mathcal{L}(E,F)$ sobreyectiva. Entonces $T\big(B_E(1)\big)$ contiene una bola abierta alrededor de cero; es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_F(\varepsilon) \subseteq T\left(B_E(1)\right)$.

Demostración. Dividiremos la demostración en tres pasos:

1. $\overline{T\big(B_E(1/2)\big)}$ tiene interior no vacío:

   Sabemos que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_E(n/2)$. Entonces $F := T(E) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T\big(B_E(n/2)\big)$. Como F es completo entonces, por el Teorema de la categoría de Baire, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

   $$\operatorname{int}\left(\overline{T\big(B_E(n/2)\big)}\right) \neq \varnothing$$

   lo que equivale a decir que existen $\widetilde{y} \in F$ y $\widetilde{\varepsilon} > 0$, tales que

   $$B_F\left(\widetilde{y}; \widetilde{\varepsilon}\right) \subseteq \overline{T\big(B_E\left(n/2\right)\big)}.$$

   Pero

   $$\overline{T\big(B_E(n/2)\big)} = \overline{T\big(nB_E(1/2)\big)} = n\overline{T\big(B_E(1/2)\big)},$$

   por lo tanto, tenemos que

   $$\frac{1}{n}\widetilde{y} \in B_F\left(\frac{1}{n}\widetilde{y}; \frac{1}{n}\widetilde{\varepsilon}\right) \subseteq \overline{T\big(B_E(1/2)\big)}.$$

2. $B_F(y_0;\varepsilon) - y_0 \subseteq \overline{T\big(B_E(1)\big)}$:

Tomemos $y_0 = \frac{1}{n}\widetilde{y}$ y $\varepsilon = \frac{1}{n}\widetilde{\varepsilon}$. Se tiene que

$$y_0 \in B_F(y_0; \varepsilon) \subseteq \overline{T\big(B_E(1/2)\big)},$$

de donde

$$B_F(y_0; \varepsilon) - y_0 \subseteq \overline{T\big(B_E(1/2)\big)} - y_0.$$

Demostremos que $\overline{T\big(B_E(1/2)\big)} - y_0 \subseteq \overline{T\big(B_E(1)\big)}$. Sea $z \in \overline{T\big(B_E(1/2)\big)}$, vamos a demostrar que $z - y_0 \in \overline{T\big(B_E(1)\big)}$.

Por ser z elemento de la clausura, sabemos que existe una sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $T\big(B_E(1/2)\big)$ tal que $z_n \to z$. Luego, por el Axioma de elección, construimos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en $B_E(1/2)$, tal que $z_n = Tx_n$, para $n \in \mathbb{N}$.

Además, existe una sucesión $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $T\left(B_E\left(1/2\right)\right)$ tal que $v_n \to y_0$ y, nuevamente, tomamos $v_n = T(u_n)$, para $n \in \mathbb{N}$, y encontramos $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\in B_E(1/2)$.

Se tiene que, para $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_n - u_n\| \leq \|x_n\| + \|u_n\| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

por tanto $x_n - u_n \in B_E(1)$. De donde $T(x_n - u_n) \in T\big(B_E(1)\big)$. Luego, por linealidad

$$T(x_n - u_n) = T(x_n) - T(u_n) = z_n - v_n \to z - y_0,$$

entonces $z - y_0 \in \overline{T\big(B_E(1)\big)}$. Por tanto $B_F(y_0; \varepsilon) - y_0 = B_F(\varepsilon) \subseteq \overline{T\big(B_E(1)\big)}$.

3. $B_F(\varepsilon/2) \subseteq T\big(B_E(1)\big)$:

   Sea $y \in B_F(\varepsilon/2)$, notemos que, por el paso anterior, se tiene que $B_F\left(\varepsilon/2^n\right) \subseteq \overline{T\big(B_E(1/2^n)\big)}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $y \in B_F\left(\varepsilon/2\right)$, entonces $y \in \overline{T\big(B_E(1/2)\big)}$, de donde, existe $v_1 \in T\big(B_E(1/2)\big)$ tal que

   $$\|y - v_1\| < \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2^2}.$$

   Elegimos v_1 tal que $v_1 = T(x_1)$, con $x_1 \in B_E\left(1/2\right)$ y luego

   $$\big\|y - T(x_1)\big\| < \frac{\varepsilon}{2^2}$$

   entonces

   $$y - T(x_1) \in B_F\left(\varepsilon/2^2\right) \subseteq \overline{T\big(B_E(1/2^2)\big)};$$

luego existe $v_2 \in T\big(B_E(1/2^2)\big)$ tal que

$$\|y - T(x_1) - v_2\| < \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{2^3},$$

con $v_2 = T(x_2)$ y $x_2 \in B_E\,(1/4)$ y entonces

$$y - (T(x_1) + T(x_2)) \in B_F\left(\frac{\varepsilon}{2^3}\right).$$

De donde, nuevamente existe $v_3 \in T\big(B_E(1/8)\big)$ tal que $v_3 = T(x_3)$, $x_3 \in B_E(1/8)$ y

$$\|y - Tx_1 - Tx_2 - Tx_3\| < \frac{\varepsilon}{2^4}.$$

Recursivamente, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E tal que $x_n \in B_E\,(1/2^n)$ y

$$\left\| y - T\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right\| < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Sea $z_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$, se tiene que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en E. Además, para $n > m$, tenemos que

$$\|z_n - z_m\| = \left\|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| < \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{2^k} < \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \to 0,$$

cuando $m \to +\infty$. Como E es completo, existe $x \in E$ tal que $z_n \to x$, de donde

$$T(z_n) \to Tx = y.$$

Además

$$\|x\| = \text{lím}\,\|z_n\| = \text{lím}\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\| \leq \|x_1\| + \text{lím}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k} \leq \|x_1\| + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Luego,

$$x \in B_E(1)$$

entonces $y = T(x) \in T\big(B_E(1)\big)$ y por tanto $B_F(\varepsilon/2) \subseteq T\big(B_E(1)\big)$. $\square$

Con esto, demostraremos el siguiente teorema.

TEOREMA 2.10: Aplicación abierta

Sean E, F espacios de Banach y $T \in \mathcal{L}(E, F)$ sobreyectiva, entonces T es abierta.

Demostración. Sean A un abierto de E y $y \in T(A)$. Entonces existe $x \in A$ tal que $y = Tx$ y, como A es abierta, existe $r > 0$ tal que $x \in B_E(x;r) \subseteq A$. Además,

$$B_E(r) = B_E(x;r) - x \subseteq A - x,$$

entonces

$$\frac{1}{r} B_E(r) = B_E(1) \subseteq \frac{1}{r}(A - x),$$

de donde

$$T\big(B_E(1)\big) \subseteq \frac{1}{r}\big(T(a) - Tx\big).$$

Por el lema anterior, sabemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_F(\varepsilon) \subseteq T\left(B_E(1)\right) \subseteq \frac{1}{r}\big(T(A) - Tx\big),$$

y dado que $r > 0$

$$rB_F(\varepsilon) \subseteq T(A) - Tx.$$

Esto último equivale a $B_F(Tx; r\varepsilon) \subseteq T(A)$, de donde

$$y \in B_F(y, r\varepsilon) \subseteq T(A),$$

por tanto $T(A)$ es abierto. □

En el siguiente corolario, cuya demostración es inmediata, se alcanza el objetivo de esta sección.

> **COROLARIO 2.11.** Sean E, F de Banach y $T \in \mathcal{L}(E, F)$ biyectiva, entonces $T^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

Así, se tiene que, en espacios de Banach, toda aplicación lineal biyectiva es bicontinua.

2.5. Teorema del grafo cerrado

En esta sección obtendremos el Teorema del grafo cerrado como consecuencia del Teorema de la aplicación abierta. Cabe mencionar que es posible demostrar una equivalencia entre estos dos Teoremas aunque no la abarcaremos aquí. Para enunciar el Teorema, es necesario ver la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.7

Sean E, F espacios vectoriales normados y $T\colon \operatorname{dom}(T) \subseteq E \to F$ un operador lineal. Se dice que T es cerrado *si el conjunto*

$$\operatorname{graf}(T) = \{(x, y) \in E \times F : x \in \operatorname{dom}(T),\ y = Tx\},$$

denominado grafo *de la aplicación, es cerrado considerando la topología producto inducida por la norma*

$$\|(x, y)\|_{E\times F} = \|x\|_E + \|y\|_F\,,$$

para $(x, y) \in E \times F$.

Antes de abordar el teorema, trabajaremos con la definición anterior.

PROPOSICIÓN 2.12. Todo operador lineal y continuo es cerrado.

Demostración. Sean E, F espacios vectoriales normados, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ y $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\operatorname{graf}(T)$; es decir, $y_n = Tx_n$, tal que $(x_n, y_n) \to (x, y)$. Puesto que $T \in \mathcal{L}(E, F)$, se tiene que $x_n \to x \in E$ y $y_n = Tx_n \to Tx$.

Luego, se obtiene que $(x, y) \in \operatorname{graf}(T)$. □

A continuación, veremos un ejemplo de una aplicación lineal y no acotada cuyo grafo es cerrado.

EJERCICIO 2.5. Muestre que la siguiente aplicación es cerrada:

$$\begin{aligned} T\colon \mathcal{C}^1[0,1] &\longrightarrow \mathcal{C}[0,1] \\ x &\longmapsto Tx = x' \end{aligned}$$

Demostración. Sea $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\operatorname{graf}(T)$ tal que $(x_n, y_n) \to (x, y)$. Tenemos que $x_n \in \mathcal{C}^1[0,1]$ y $x_n \to x$. Luego, y_n es de la forma $y_n = Tx_n = x_n'$ y además $y_n \to y \in \mathcal{C}[0,1]$.

Sabemos, por otro lado, que toda función continua es integrable en un compacto. Por lo tanto, para $t \in [0,1]$

$$\int_0^t y(s)\,ds = \int_0^t \lim y_n(s)\,ds = \int_0^t \lim x_n'(s)\,ds$$

y, por convergencia dominada,

$$\int_0^t y(s)\,ds = \lim \int_0^t x_n'(s)\,ds = \lim\left(x_n(t) - x_n(0)\right),$$

de donde

$$\int_0^t y(s)ds = x(t) - x(0),$$

entonces podemos expresar a x como

$$x(t) = x(0) + \int_0^t y(s)\,ds,$$

por lo tanto, $x \in \mathcal{C}^1[0,1]$. Además

$$x'(t) = \left(\int_0^t y(s)\,ds\right)' = y(t).$$

Entonces $\operatorname{graf}(T)$ es cerrado. □

La siguiente propiedad nos dará una condición necesaria para que el grafo de una aplicación lineal y continua sea cerrado.

PROPOSICIÓN 2.13. Sean E, F espacios vectoriales normados, $M \subseteq E$ un subespacio vectorial denso tal que $M \neq E$ y $T \in \mathcal{L}(M, F)$, entonces T no es cerrado.

Demostración. Supongamos que T es cerrado, entonces $\operatorname{graf}(T)$ es cerrado en $E \times F$. Sea $(x,y) \in \operatorname{graf}(T)$; existe una sucesión en $\operatorname{graf}(T)$, $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $(x_n, y_n) \to (x,y)$ en $\operatorname{graf}(T)$. Pero esto no es posible ya que existe $u \in E$ tal que u es límite de una sucesión en M, pero $u \notin M$. □

Previo a enunciar el Teorema, veamos un poco de notación.

DEFINICIÓN 2.8

Sean E, F espacios vectoriales normados. Definimos el siguiente conjunto

$$\mathscr{C}(E,F) = \left\{T\colon \operatorname{dom}(T) \subseteq E \to F : T \text{ es lineal y cerrado}\right\},$$

denominado el espacio de los operadores cerrados.

Nótese que por lo anterior $\mathcal{L}(E,F) \subseteq \mathscr{C}(E,F)$; pero si $M \subsetneq E$, entonces la inclusión $\mathcal{L}(M,F) \subseteq \mathscr{C}(E,F)$ no necesariamente se cumple.

TEOREMA 2.14: Grafo cerrado

Sean E, F espacios de Banach y $T \in \mathscr{C}\big(E,F\big)$. Si $\operatorname{dom}(T)$ *es cerrado, entonces*

$$T \in \mathcal{L}\big(\operatorname{dom}(T), F\big).$$

Demostración. Nótese que al ser E de Banach y $\operatorname{dom}(T)$ cerrado, entonces $\operatorname{dom}(T)$ es de Banach. Sea

$$\begin{aligned} P\colon \operatorname{graf}(T) &\longrightarrow \operatorname{dom}(T) \\ (x, Tx) &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Esta es una función entre espacios normados completos que cumple lo siguiente.

- P es lineal.
- P es biyectiva: En efecto, por un lado, sean $(u, Tu), (v, Tv) \in \operatorname{graf}(T)$, tenemos que $P(u, Tu) = P(v, Tv)$ implica que $u = v$, entonces $Tu = Tv$ y por tanto $(u, Tu) = (v, Tv)$.

  Por otro lado, sea $x \in \operatorname{dom}(T)$, entonces $(x, Tx) \in \operatorname{graf}(T)$ y por tanto $P(x, Tx) = x$.
- P es continua: pues, dado $x \in \operatorname{dom}(T)$, tenemos que

$$\|p(x, Tx)\| \leq \|x\| + \|Tx\| = \|(x, Tx)\|.$$

Por el Teorema de la aplicación abierta P^{-1} es acotada, de donde

$$\left\|P^{-1}x\right\| = \big\|(x, Tx)\big\| \leq M\,\|x\|,$$

entonces

$$\|Tx\| \leq \|x\| + \|Tx\| \leq M\,\|x\|.$$

Luego $T \in \mathcal{L}\big(\operatorname{dom}(T), F\big)$. □

La siguiente proposición nos da condiciones necesarias y suficientes para que un operador lineal sea cerrado.

PROPOSICIÓN 2.15. Sean E, F espacios vectoriales normados y $T \in \mathcal{L}\big(\operatorname{dom}(T), F\big)$ con $\operatorname{dom}(T) \subseteq E$.

1. Si $\mathrm{dom}(T)$ es cerrado, entonces

$$T \in \mathscr{C}(E, F).$$

2. Si $T \in \mathscr{C}(E, F)$ y F es completo, entonces $\mathrm{dom}(T)$ es cerrado.

Demostración.

1. Sea $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathrm{graf}(T)$ tal que $(x_n, y_n) \to (x, y)$, con $(x, y) \in E \times F$. Entonces, $x_n \to x$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está en $\mathrm{dom}(T)$ y este es cerrado, tenemos que $x \in \mathrm{dom}(T)$. Luego $y_n \to y$ y por continuidad de T es claro que $y_n = Tx_n \to Tx$. De donde $Tx = y$; es decir, $(x, y) \in \mathrm{graf}(T)$ y entonces $\mathrm{graf}(T)$ es cerrado.

2. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathrm{dom}(T)$ tal que $x_n \to x$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Tenemos que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en F, veremos que es de Cauchy. Para ello, vemos que para todo $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\|y_n - y_m\| = \|Tx_n - Tx_m\| = \big\|T(x_n - x_m)\big\| \leq M \|x_n - x_m\| \to 0,$$

cuando $n, m \to +\infty$. Luego, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y por tanto, existe $y \in F$ tal que $y_n \to y$.

Finalmente se tiene que $(x_n, y_n) \to (x, y)$, pero $(x_n, y_n) \in \mathrm{graf}(T)$ y entonces $(x, y) \in \mathrm{graf}(T)$, de donde se obtiene que

$$x \in \mathrm{dom}(T).$$ □

2.6. Tópicos adicionales

2.6.1. Operadores adjuntos en espacios de Banach

A continuación, introduciremos brevemente el concepto de un operador adjunto en espacios no necesariamente reflexivos, como es el caso de los espacios de Banach. En el siguiente capítulo veremos cómo este concepto se relaciona con los adjuntos en espacios de Hilbert.

DEFINICIÓN 2.9

Sean E, F espacios vectoriales normados y $T \in \mathcal{L}(E, F)$. El operador adjunto (o traspuesto) de T *se define como*

$$\begin{aligned} T^\times : F^* &\longrightarrow E^* \\ g &\longmapsto T^\times g = g \circ T. \end{aligned}$$

Ahora, observemos algunas propiedades del operador adjunto.

TEOREMA 2.16

Sean E, F *espacios vectoriales normados y* $T \in \mathcal{L}(E,F)$. *Entonces* $T^\times \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$. *Además* $\|T^\times\|_{\mathcal{L}(F^*,E^*)} = \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

Demostración. Demostraremos el Teorema en tres partes.

1. $T^\times$ es lineal pues la composición de funciones lineales es lineal.
2. Sea $g \in F^*$, dado que trabajamos en el dual, se tiene que

$$\|T^\times g\|_{E^*} = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{|T^\times g(x)|}{\|x\|_E};$$

   además, para $x \in E$,

$$\left|T^\times g(x)\right| = |g(Tx)| \leq \|g\|_{F^*} \|Tx\|_F \leq \|g\|_{F^*} \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|x\|_E,$$

   entonces

$$\left\|T^\times g\right\|_{E^*} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|g\|_{F^*},$$

   luego, $T^\times \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ y además $\|T^\times\|_{\mathcal{L}(F^*,E^*)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

3. Sea $x \in E$ tal que $Tx \neq 0$, por Hahn-Banach, existe $g_x \in F^*$ tal que

$$\|g_x\|_{F^*} = 1 \quad \text{y} \quad g_x(Tx) = \|Tx\|_F.$$

   Así, para todo $x \in E$, tenemos que

$$\|Tx\|_F = \left|g_x(Tx)\right| = \left|T^\times g_x(x)\right| \leq \left\|T^\times\right\|_{\mathcal{L}(F^*,E^*)} \|x\|_E \|g_x\|_{F^*} = \left\|T^\times\right\|_{\mathcal{L}(F^*,E^*)} \|x\|_E;$$

   luego, $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \|T^\times\|_{\mathcal{L}(F^*,E^*)}$. $\square$

OBSERVACIÓN (Linealidad)**.** Es fácil ver que

- $(S+T)^\times = S^\times + T^\times$.

- $(ST)^{\times} = T^{\times}S^{\times}$.
- $\left(T^{-1}\right)^{\times} = \left(T^{\times}\right)^{-1}$.

Mediante esta observación, podemos ver que el conjunto de los operadores adjuntos (de operadores con inversa) forma un grupo con respecto a la composición.

2.6.2. Reflexividad

A continuación veremos un par de propiedades sobre la reflexividad de un espacio vectorial normado. . Para esto, recordemos la definición de espacio reflexivo.

DEFINICIÓN 2.10: Espacio reflexivo

Sea E un espacio vectorial normado, se dice reflexivo *si*

$$\begin{aligned} \varphi\colon E &\longrightarrow E^{**} \\ x &\longmapsto \varphi(x), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \varphi(x)\colon E^{*} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f &\longmapsto \varphi(x)(f) = f(x), \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

PROPOSICIÓN 2.17. Sea E un espacio vectorial normado, se tiene que

$$\|\varphi(x)\|_{E^{**}} = \|x\|_{E},$$

para todo $x \in E$.

Demostración. Sea $x \in E$, tenemos, por Hahn-Banach, que

$$\|\varphi(x)\|_{E^{**}} = \sup_{\substack{f \in E^{*} \\ f \neq 0}} \frac{|\varphi(x)f|}{\|f\|_{E^{*}}} = \sup_{\substack{f \in E^{*} \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{E^{*}}} = \|x\|_{E}. \qquad \square$$

Esta propiedad nos indica que φ es una isometría.

COROLARIO 2.18. Sea E un espacio vectorial normado, se tiene que

1. $\varphi\colon E \to \varphi(E)$ es una isometría.
2. E es reflexivo si y sólo si $\varphi(E) = E^{**}$

2.6.3. Convergencias

En esta parte vamos a discutir diferentes definiciones de convergencia que existen en un espacio vectorial normado.

DEFINICIÓN 2.11

Sean E un espacio vectorial normado y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E.

1. *Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$* converge fuertemente *si $\|x_n - x\| \to 0$ y se lo nota*

$$x_n \to x.$$

2. *Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$* converge débilmente *a $x \in E$ si $f(x_n) \to f(x)$, para toda $f \in E^*$. Se lo nota*

$$x_n \xrightarrow{w} x \qquad o \qquad x_n \rightharpoonup x.$$

Observemos que la convergencia débil cumple algunas propiedades similares a la convergencia normal.

PROPOSICIÓN 2.19. Sea E un espacio vectorial normado, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E y $x \in E$ tal que $x_n \rightharpoonup x$. Entonces

1. El límite es único.
2. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada.

Demostración.

1. Supongamos que $x_n \rightharpoonup y$. Entonces para toda $f \in E^*$ se tiene que $f(x_n) \to f(x)$ y $f(x_n) \to f(y)$, entonces $f(x) = f(y)$, por lo tanto $f(x-y) = 0$. Luego

$$\sup_{\substack{f\in E^* \\ f\neq 0}} \frac{|f(x-y)|}{\|f\|} = 0,$$

de donde tenemos que $\|x-y\|=0$; es decir, $x=y$.

2. Sabemos que $f(x_n) \to f(x)$ para toda $f \in E^*$. Luego $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada para toda $f \in E^*$. Por el Teorema de acotación uniforme se tiene que entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada. □

El siguiente resultado nos indica cómo se relacionan los dos tipos de convergencia.

PROPOSICIÓN 2.20. Sea E un espacio vectorial normado, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E y $x \in E$ tal que $x_n \to x$. Entonces $x_n \rightharpoonup x$ y el recíproco en general no se cumple.

Demostración.

- Sea $f \in E^*$. El resultado es directo dado que

$$\big|f(x_n)-f(x)\big| = \big|f(x_n-x)\big| \leq \|f\|\|x_n-x\| \to 0.$$

- En $\ell^2(\mathbb{C})$ tomemos $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de término general $e_n = \big(\delta_i^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ y sea $f \in \ell^2(\mathbb{C})^*$. Al ser este espacio un Hilbert, se tiene que existe $z \in \ell^2(\mathbb{C})$ tal que

$$f(e_n) = \langle e_n, z\rangle = \overline{z_n} \to 0 = f(0),$$

pues $\sum_{n=0}^{+\infty} |z_n|^2 < +\infty$; luego, $z_n \to 0$, por lo tanto $e_n \rightharpoonup 0$. Pero, por otro lado, tenemos que $\|e_n - 0\| = \|e_n\| = 1 \not\to 0$. □

A continuación veremos que en el espacio de operadores lineales y acotados, tenemos no dos sino tres tipos diferentes de convergencia.

DEFINICIÓN 2.12

Sean E, F espacios vectoriales normados y $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de operadores en $\mathcal{L}(E,F)$.

1. *Se dice que* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente *a T si*

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \to 0.$$

2. *Se dice que* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente *a T si*

$$\|T_n x - Tx\|_F \to 0,$$

> *para todo* $x \in E$.
>
> 3. *Se dice que* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente *a* T *si*
>
> $$\left|g(T_n x) - g(Tx)\right| \to 0,$$
>
> *para todo* $x \in E$ *y para toda* $g \in F^*$.

OBSERVACIÓN. Es fácil notar que convergencia uniforme implica fuerte y convergencia fuerte implica débil.

> **PROPOSICIÓN 2.21.** Sean E, F espacios vectoriales normados, E espacio de Banach, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{L}(E,F)$ tal que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente a T, entonces $T \in \mathcal{L}(E,F)$.

Demostración. Sea $x \in E$, por definición $T_n x \to Tx$. Luego $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en F acotada y, por el Teorema de acotación uniforme, tenemos que $(\|T_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada; es decir, existe $c > 0$ tal que $\|T_n\| < c$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Luego

$$\|T_n x\| \leq \|T_n\| \|x\| < c \|x\|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\lim \|T_n x\| \leq c \|x\|,$$

de donde

$$\|Tx\| \leq c \|x\|,$$

lo cual implica que $T \in \mathcal{L}(E,F)$. □

Para culminar este apartado, veremos dos tipos de convergencia que existen en el dual de un espacio vectorial normado.

DEFINICIÓN 2.13

Sean E un espacio vectorial normado y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E^*.

1. *Se dice que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$* converge fuertemente *a f si*

$$\|f_n - f\|_{E^*} \to 0$$

   y notamos $f_n \to f$.

2. *Se dice que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débil-$*$ *a* f *(se lee que converge débil estrella) si*

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| \to 0,$$

para todo $x \in E$*; y notamos* $f_n \xrightharpoonup{*} f$.

2.6.4. Teorema de Hahn-Banach, versiones geométricas

A continuación se provarán las dos versiones geométricas del Teorema de Hahn-Banach para separación de conjuntos convexos en espacios normados.

En lo siguiente E denotará un espacio vectorial normado real $\big(E, \|\cdot\|\big)$.

DEFINICIÓN 2.14

Un hiperplano afín *es un subconjunto* H *de* E *de la forma*

$$H = \big\{x \in E : f(x) = \alpha\big\},$$

donde f *es un funcional lineal sobre* E*, no idénticamente nulo, y* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Escribimos $H = [f = \alpha]$ *y decimos que* H *es el hiperplano de ecuación* $f = \alpha$.

Veremos cuándo un hiperplano cualquiera es o no cerrado.

PROPOSICIÓN 2.22 (Hiperplano cerrado)**.** El hiperplano $H = [f = \alpha]$ es cerrado si y sólo si f es continua.

Demostración. Supongamos que f es continua y notemos que $H = f^{-1}\big(\{\alpha\}\big)$. Como el conjunto $\{\alpha\}$ es cerrado, entonces H es cerrado.

Recíprocamente, supongamos que H es cerrado. Entonces su complemento H^c, es abierto y no vacío, puesto que $f \not\equiv 0$. Sea $x_0 \in H^c$, supongamos que $f(x_0) < \alpha$ y sea $r > 0$ tal que $B(x_0; r) \subseteq H^c$.

Se tiene que

$$f(x) < \alpha, \tag{2.1}$$

para todo $x \in B(x_0; r)$, en efecto, si existiera un $x_1 \in B(x_0, r)$ tal que $f(x_1) > \alpha$, dado que el segmento

$$[x_0, x_1] = \big\{x_t = (1-t)x_0 + tx_1 : t \in [0, 1]\big\}$$

está totalmente contenido en $B(x_0, r)$, entonces $[x_0, x_1] \not\subset H$ y $f(x_t) \neq \alpha$, para todo $t \in [0, 1]$.

Por otro lado, supongamos que existe $t \in [0, 1]$ tal que $f(x_t) = \alpha$, entonces, al ser combinación convexa, tenemos que

$$\alpha = f(x_0) - tf(x_0) + tf(x_1),$$

de donde

$$t = \frac{f(x_0) - \alpha}{f(x_0) - f(x_1)} = \frac{\alpha - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}.$$

Luego, sabemos que $f(x_0) < \alpha < f(x_1)$, entonces $0 < \alpha - f(x_0) < f(x_1) - f(x_0)$ y también $f(x_1) - f(x_0) > 0$, por lo cual

$$0 < t = \frac{\alpha - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} < \frac{f(x_1) - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = 1.$$

Por tanto, $t \in [0, 1]$ y entonces $x_t \in B(x_0, r)$ y $x_t \in H$, lo cual es absurdo. Por tanto (2.1) se mantiene.

Por otro lado, es fácil ver que todo elemento de $B(x_0, r)$ puede ser escrito como $x_0 + rz$, con z elemento de la bola $B_E(1)$ pues

$$\|x_0 + rz - x_0\| = r\|z\| < r.$$

Luego, $f(x_0 + rz) = f(x_0) + rf(z) < \alpha$ para todo $z \in B_E(1)$; de donde

$$f(z) < \frac{1}{r}\big(\alpha - f(x_0)\big),$$

para todo $z \in B(0_E, 1)$. Tomando el supremo de estos z, se tiene que

$$\|f\| = \sup_{\substack{z \in E \\ \|z\| \leq 1}} f(z) \leq \frac{1}{r}\big(\alpha - f(x_0)\big).$$

Por tanto, f es acotada y entonces es continua. □

Veremos que lo anterior nos sirve para definir el concepto de separabilidad en un espacio vectorial normado.

DEFINICIÓN 2.15

Sean $A, B \subseteq E$. Decimos que el hiperplano $H = [f = \alpha]$ separa a A y B en sentido amplio *si verifica*

$$f(x) \leq \alpha \quad y \quad f(y) \geq \alpha,$$

para todo $x \in A$ *y para todo* $y \in B$.

Por otro lado, decimos que H separa a A y B en sentido estrico *si existe* $\varepsilon > 0$ *tal que*

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon \quad y \quad f(y) \geq \alpha + \varepsilon$$

para todo $x \in A$ *y para todo* $y \in B$.

OBSERVACIÓN. Geométricamente la separación significa que los conjuntos A y B se encuentran «de un lado y de otro de H».

Recordemos además que A se dice *convexo* si

$$tx + (1-t)y \in A,$$

para todo $x, y \in A$ y para todo $t \in [0,1]$.

LEMA 2.23 (Funcional de Minkowski de un convexo)**.** Sea $C \subseteq E$ un convexo abierto con $0_E \in C$. Para todo $x \in E$ definimos

$$p(x) = \inf \left\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C\right\}. \tag{2.2}$$

(p es llamado el *funcional de Minkowski de* C.) Se tiene que p es una aplicación sublineal y además cumple con lo siguiente.

1. Existe $M > 0$ tal que

$$0 \leq p(x) \leq M\|x\|, \tag{2.3}$$

   para todo $x \in E$.

2. C está caracterizado por

$$C = \left\{x \in E : p(x) < 1\right\}. \tag{2.4}$$

Demostración.

- p **es positiva homogénea:** Sean $x \in E$ y $\beta > 0$. Se tiene que

$$p(\beta x) = \inf \left\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}\beta x \in C\right\}$$

$$\begin{aligned} &= \beta \operatorname{ínf} \left\{ \alpha > 0 : \alpha^{-1} x \in C \right\} \\ &= \beta p(x). \end{aligned}$$

- p **cumple** (2.3)**:** Como C es abierto, existe $r > 0$ tal que $B_E(r) \subseteq C$. Para todo $x \in B_E(r)$ se tiene que

$$\begin{aligned} p(x) &= \operatorname{ínf} \left\{ \alpha > 0 : \alpha^{-1} x \in B_E(r) \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \alpha > 0 : \alpha^{-1} x \in B_E(r) \right\} = \frac{1}{r} \|x\|. \end{aligned}$$

  Luego, puesto que E es espacio vectorial normado, se cumple (2.4).

- p **cumple** (2.4)**:** Sea $x \in C$, como C es abierto, existe $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño tal que $(1+\varepsilon)x \in C$, entonces

$$p(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1.$$

  Por otro lado, si $p(x)$ <1, entonces existe $\alpha \in (0,1)$ tal que $\alpha^{-1}x \in C$ y luego $x = \alpha(\alpha^{-1}x) + (1-\alpha)0 \in C$.

- p **es subaditiva:** Sean $x, y \in E$ y $\varepsilon > 0$. Por definición de aplicación sublineal y de (2.4), es claro que $\frac{x}{p(x)+\varepsilon} \in C$ y $\frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C$. Luego, por convexidad

$$\frac{tx}{p(x)+\varepsilon} + \frac{(1-t)y}{p(y)+\varepsilon} \in C,$$

  para todo $t \in [0,1]$ y en particular, para $t = \dfrac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}$, se tiene que

$$\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in C.$$

  Luego

$$p(x+y) < p(x) + p(y) + 2\varepsilon,$$

  para todo $\varepsilon > 0$. De donde se sigue la subaditividad de p. Por tanto, p es sublineal. □

Utilizaremos este lema para probar dos más antes de enunciar el primer Teorema importante de este apartado.

> **LEMA 2.24.** Sean $C \subseteq E$ convexo, abierto, no vacío y $x_0 \in C^c$. Existe $f \in E^*$

tal que $f(x) < f(x_0)$, para todo $x \in C$. En particular el hiperplano de ecuación $H = [f = f(x_0)]$ separa $\{x_0\}$ de C en sentido amplio.

Demostración. Por traslación, podemos suponer que $0_E \in C$ e introducir el funcional de Minkowski de C, p. Consideremos el subespacio vectorial $G = \langle x_0 \rangle$ y el funcional lineal g, definido en G por

$$g(tx_0) = t,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Se tiene que

$$g(x) \leq p(x),$$

para todo $x \in G$, pues todo $x \in G$ puede expresarse como tx_0 para algún t real. Si $t \leq 0$, es claro que $g(x) \leq p(x)$ pues p es estrictamente positivo. Por otro lado, si $t > 0$, por el lema anterior, al ser p sublineal tenemos que $p(x) = tp(x_0)$. Entonces dado que C cumple (2.4), vemos que $p(x) = tp(x_0) \geq t$.

Por el Teorema de Hahn-Banach, existe $f \in E^*$ extensión de g y

$$f(x) \leq p(x),$$

para todo $x \in E$, en particular, tomando $t = 1$, se tiene que $f(x_0) = 1$ y f es continua por (2.3). Por (2.4) vemos que $f(x) < 1$ para todo $x \in C$, por lo que el hiperplano de ecuación $H = [f = f(x_0)]$ separa $\{x_0\}$ de C en sentido amplio. □

LEMA 2.25. Sean $A, B \subseteq E$ convexos, no vacíos y disjuntos. Entonces $C = A - B$ es convexo.

Demostración. Sean $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$ y $t \in [0,1]$. Tenemos que

$$ta_1 + (1-t)a_2 \in A$$

y

$$tb_1 + (1-t)b_2 \in B.$$

De las ecuaciones anteriores obtenemos que

$$t(a_1 - b_1) + (1-t)(a_2 - b_2) \in A - B.$$

Por lo tanto C es convexo. □

Procedemos a continuación con los resultados importantes de este apartado.

TEOREMA 2.26: Hahn-Banach, primera forma geométrica

Sean $A, B \subseteq E$ dos conjuntos convexos, no vacíos, disjuntos, tal que A es abierto. Entonces existe un hiperplano cerrado que separa A de B en sentido amplio.

Demostración. Sea $C = A - B$, entonces C es convexo por el lema anterior. Además, es abierto puesto que $C = \bigcup_{y \in B} A - \{y\}$ y cada uno de los conjuntos $A - \{y\}$ es abierto para todo $y \in B$. Por otro lado $0_E \notin C$, puesto que $A \cap B = \varnothing$. Luego, por el segundo lema de este apartado, existe $f \in E^*$ tal que

$$f(z) < 0,$$

para todo $z \in C$; por tanto, para todo $x \in A$ y $y \in B$, tenemos

$$f(x - y) = f(x) - f(y) < 0,$$

de donde

$$f(x) < f(y).$$

Sea α tal que

$$\sup_{x \in A} f(x) \leq \alpha \leq \inf_{y \in B} f(y).$$

Es claro que el hiperplano con ecuación $[f = \alpha]$ separa ampliamente A de B. $\square$

TEOREMA 2.27: Hahn-Banach, segunda forma geométrica

Sean $A, B \subset E$ dos conjuntos convexos, no vacíos, disjuntos, A cerrado y B compacto. Entonces existe un hiperplano cerrado que separa A de B en sentido estricto.

Demostración. Sea $C = A \setminus B$, de forma que C es convexo. Además, es cerrado puesto que $A \subseteq B^c$. Además es claro que $0_E \notin C$[1]. Entonces existe $r > 0$ tal que $B_E(r) \cap C = \varnothing$. Luego, por el Teorema anterior, existe un hiperplano que

[1] Aquí entra en juego la compacidad de B que da la posibilidad de encontrar sucesiones convergentes a 0 si se considera que $0 \in C$.

separa $B_E(r)$ de C. Por tanto, existe $f \in E^*$ tal que

$$f(x-y) \leq f(rz),$$

para todo $\forall x \in A$, $y \in B$ y $z \in B(0_E, 1)$. Luego, para cualquier $z \in B_E(1)$ con $-z \in B_E(1)$[2] y para todo $x \in A$ y $y \in B$

$$f(x-y) \leq f(-rz),$$

entonces

$$f(x-y) \leq -rf(z).$$

Por tanto

$$f(x-y) \leq -r\|f\|,$$

para todo $x \in A$ y $y \in B$. Sea $\varepsilon = \frac{1}{2}r\|f\|$ se tiene por linealidad que

$$f(x) + \varepsilon \leq f(y) - \varepsilon,$$

para todo $x \in A$ y $y \in B$. Luego, es claro que existe un α tal que

$$\sup_{x\in A} f(x) + \varepsilon \leq \alpha \leq \inf_{y \in B} f(y) - \varepsilon,$$

por tanto el hiperplano de ecuación $[f = \alpha]$ separa estrictamente A de B. □

Es importante resaltar que para un par de conjuntos no vacíos, convexos y con intersección vacía, si no se toma una mayor asumsión sobre los conjuntos puede ser casi *imposible* separar a los conjuntos [1, p. 7]. Esto a excepción de espacios de dimensión finita como se explica en la misma referencia.

COROLARIO 2.28. Sea $F \subset E$ subespacio vectorial tal que $\overline{F} \neq E$. Existe $f \in E^*$, $f \not\equiv 0$, tal que

$$f(x) = 0,$$

para todo $x \in F$.

Demostración. Sea $x_0 \in \overline{F}^c$. Usando la segunda forma geométrica con $A = \overline{F}$ y $B = \{x_0\}$, sabemos que existe un hiperplano de ecuación $[f = \alpha]$ que separa estrictamente $\overline{F}$ y $\{x_0\}$. Luego tenemos que

$$f(x) < \alpha < f(x_0),$$

[2] Al menos cero lo está.

para todo $x \in F$. Se sigue que $f(x) = 0$ para todo $x \in F$ puesto que $f(\lambda x) < \alpha$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

2.7. Ejercicios propuestos

1. Sean $T \in \mathscr{C}(E,F)$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\widetilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $\operatorname{dom}(T)$ tales que $x_n \to x$ y $\widetilde{x}_n \to x$ con $x \in F$. Si $Tx_n \to y$ y $T\widetilde{x}_n \to \widetilde{y}$ con $y, \widetilde{y} \in F$, entonces $y = \widetilde{y}$.

2. Sean E un espacio vectorial y p un operador sublineal. Demuestre que

   a) $p(0) = 0$.

   b) $p(-x) \geq -p(x)$.

   c) $M = \{x \in E : p(x) \leq \gamma\}$ con $\gamma > 0$ es convexo.

3. Sean E un Hilbert y $x_0 \in E \setminus \{0\}$, entonces existe $f \in E^*$ tal que
$$\|f\| = 1 \quad \text{y} \quad f(x_0) = \|x_0\|.$$

4. Sea E un espacio vectorial normado, si E tiene un conjunto de n vectores linealmente independientes, entonces E^* también posee un conjunto de n vectores linealmente independientes.

5. Sean E, F de Banach y $T \in \mathcal{L}(E,F)$ biyectiva, entonces existen $\alpha, \beta > 0$ tales que
$$\alpha\|x\| \leq \|Tx\| \leq \beta\|x\|,$$
para todo $x \in E$.

6. Si $\mathcal{L}(E,F)$ es Banach, entonces F es Banach.

7. Sean X, Y de Banach y $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{L}(X,Y)$ mostrar que las siguientes proposiciones son equivalentes:

   a) $\big(\|T_n\|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.

   b) $\big(\|T_n x\|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, para todo $x \in X$.

   c) $\Big(\big|g(T_n x)\big|\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, para todo $x \in X$, $g \in Y^*$.

8. Sean X, Y espacios normados, $T_1 \in \mathscr{C}(X,Y)$ y $T_2 \in \mathcal{L}(X,Y)$. Demuestre que $T_1 + T_2 \in \mathscr{C}(X,Y)$.

9. Sean $X_1 = \big(X, \|\cdot\|_1\big)$ y $X_2 = \big(X, \|\cdot\|_2\big)$ espacios de Banach. Si existe c tal que $\|x\|_1 \leq c\|x\|_2$, para todo $x \in X$. Demostrar que existe k tal que $\|x\|_2 \leq k\|x\|_1$, para todo $x \in X$.

10. Sean $T \in \mathcal{L}(E,F)$, $A \subseteq E$. Demuestre lo siguiente:

    a) $T(\alpha A) = \alpha T(A)$, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

    b) $\overline{\alpha A} = \alpha \overline{A}$, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

    c) $B(y,\varepsilon) \subseteq nA$ entonces $B\left(\frac{1}{n}y, \frac{\varepsilon}{n}\right) \subseteq A$, $n > 0$.

11. Sean $X_1 = \big(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_1\big)$ con $\|x\|_1 = \max\limits_{t\in[0,1]} \big\|x(t)\big\|$, $X_2 = \big(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_2\big)$ con $\|x\|_2 = \left(\int_0^1 x^2(t)\,dt\right)^{1/2}$ y $T\colon X_1 \to X_2$ tal que $Tx = x$. Demuestre que T es continua. ¿T^{-1} es continua?

12. Sean E, un espacio vectorial normado y $x_0 \in E \setminus \{0\}$. Mostrar que existe $f \in E^*$ tal que $\|f\| = \dfrac{1}{\|x_0\|}$ y $f(x_0) = 1$.

13. Sean E, F espacios de Banach y $T \in \mathcal{L}(E,F)$ biyectiva. Demostrar que $T^{-1}\colon \operatorname{img}(T) \to E$ es continua si y sólo si $\operatorname{img}(T)$ es cerrada.

14. Sean E, F espacios vectoriales normados con F compacto y $T\colon E \to F$ cerrado. Demostrar que T es acotado.

15. Sean E un espacio vectorial normado y $x_0 \in E$ tal que para todo $f \in E^*$, con $\|f\| = 1$, se tiene que $\big|f(x_0)\big| \leq 1$. Demostrar que $\|x_0\| \leq 1$.

2.8. Ejercicios resueltos

EJERCICIO 2.6. Sean E un espacio vectorial cerrado y F un subespacio propio cerrado de E. Demostrar que existe $f \in E^*$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in F$, pero $f \neq 0$. (Sugerencia: el operador f es tal que $f(x_0) = \inf_{y \in F} \|x_0 - y\|$, para algún $x_0 \in E$ adecuado.)

Demostración. Como F es un subespacio propio, existe $x_0 \in E$ tal que $x_0 \notin F$. Tomemos

$$\delta = \inf_{y \in F} \|x_0 - y\|.$$

Como F es cerrado y $x_0 \notin F$, se tiene que $\delta > 0$.

Consideremos el espacio $V = F \oplus \operatorname{span}\{x_0\}$, todo elemento de este espacio se puede escribir de manera única como $y + \alpha x_0$, con $y \in F$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.

Definamos el operador

$$\begin{aligned} g\colon \quad V \quad &\longrightarrow \mathbb{K} \\ y + \alpha x_0 &\longmapsto \alpha\delta. \end{aligned}$$

Este operador es lineal pues para $y_1 + \alpha_1 x_0$ y $y_2 + \alpha_2 x_0$ en V tenemos que

$$\begin{aligned} g(y_1 + \alpha_1 x_0 + y_2 + \alpha_2 x_0) &= g\big(y_1 + y_2 + (\alpha_1 + \alpha_2)x_0\big) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2)\delta \\ &= \alpha_1\delta + \alpha_2\delta \\ &= g(y_1 + \alpha_1 x_0) + g(y_2 + \alpha_2 x_0), \end{aligned}$$

además g es continuo puesto que

$$\big|g(y + \alpha x_0)\big| = |\alpha|\delta = |\alpha| \inf_{\widetilde{y} \in F} \|x_0 - \widetilde{y}\|,$$

como $y \in F$, si $\alpha \neq 0$, se tiene que $-\frac{1}{\alpha} y \in F$, por lo tanto

$$\big|g(y + \alpha x_0)\big| = |\alpha| \inf_{\widetilde{y} \in F} \|x_0 - \widetilde{y}\| \leq |\alpha| \left\| x_0 + \frac{1}{\alpha} y \right\| = \|y + \alpha x_0\|,$$

esta desigualdad se sigue cumpliendo cuando $\alpha = 0$ pues $\big|g(y)\big| = 0 \leq \|y\|$. Por lo tanto, se tiene que

$$\big|g(x)\big| \leq \|x\|,$$

para todo $x \in V$; es decir, $g \in V^*$.

Por el Teorema de Hahn-Banach para espacios normados existe $f \in E^*$ tal que f extiende a g y con esto, se tiene un operador $f \in E^*$ tal que para todo $x \in F$

$$f(x) = g(x) = 0$$

y además

$$f(x_0) = g(x_0) = \delta = \inf_{y \in F} \|x_0 - y\| \neq 0,$$

por lo tanto $f \neq 0$. □

Ejercicio 2.7. Sea E un espacio de Banach, F un espacio normado y para cada $n \in \mathbb{N}$, $T_n \colon E \to F$, operadores lineales y acotados, tales que $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| = +\infty$. Demostrar que existe $x_0 \in E$ tal que $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|T_n(x_0)\| = +\infty$.

Demostración. Supongamos que $\sup \|T_n(x)\| < +\infty$. para todo $x \in E$. Con esto se tiene que para todo $x \in E$, existe $c_x > 0$ tal que

$$\left\|T_n(x)\right\| \leq c_x$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Puesto que E es un espacio de Banach, usando el Teorema de acotación uniforme, se tiene que existe $c > 0$ tal que

$$\|T_n\| \leq c$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Lo cual contradice que $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| = +\infty$.

Por lo tanto, existe $x_0 \in E$ tal que $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|T_n(x_0)\| = +\infty$. □

Ejercicio 2.8. Sean $E_1 = \big(E, \|\cdot\|_1\big)$ y $E_2 = \big(E, \|\cdot\|_2\big)$ espacios de Banach tales que la convergencia en E_1 implica la convergencia en E_2. Demostrar que las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes.

Demostración. Sea

$$\begin{aligned} T \colon E_1 &\longrightarrow E_2 \\ x &\longmapsto Tx = x. \end{aligned}$$

Esta función es lineal, biyectiva y continua, pues sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en

E que converge a x en E_1, se tiene por hipótesis que

$$\|x_n - x\|_1 \to 0,$$

entonces

$$\|Tx_n - Tx\|_2 = \|x_n - x\|_2 \to 0;$$

es decir, $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a Tx en E_2, por lo que T es continua.

La continuidad implica acotación, por lo que existe $c > 0$ tal que

$$\|x\|_2 = \|Tx\|_2 \leq c\|x\|_1,$$

para todo $x \in E$. Luego, por el Teorema de la aplicación abierta se tiene que T^{-1} es también continua y por tanto existe $b > 0$ tal que

$$\|x\|_1 = \|T^{-1}x\|_1 \leq b\|x\|_2,$$

para todo $x \in E$. Por lo tanto

$$\frac{1}{b}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c\|x\|_1,$$

para todo $x \in E$; es decir, las normas son equivalentes. □

EJERCICIO 2.9. Sea E un espacio espacio vectorial normado y $M \subseteq E$ tal que para $f \in E^*$, $f(x) = 0$ para todo $x \in M$ implica $f = 0$. Demostrar que M es total.

Demostración. Supongamos que M no es total; es decir, $\overline{\operatorname{span} M} \neq E$. Por lo tanto $\overline{\operatorname{span} M}$ es un subespacio propio de E; es decir, existe $u \in E$ tal que $u \notin \overline{\operatorname{span} M}$. Por el primer ejercicio de esta sección, existe $f \in E^*$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in \overline{\operatorname{span} M}$, pero $f \neq 0$ pues $f(u) \neq 0$. Esto contradice la hipótesis sobre M que dice que $f = 0$ pues $f(x) = 0$ para todo $x \in F$ y ya que $M \subseteq \overline{\operatorname{span} M}$, entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in M$. Por tanto, M es total en E. □

EJERCICIO 2.10. Sean E, F espacios normados y $T\colon E \to F$ un operador lineal cerrado. Demostrar que el núcleo de T es un conjunto cerrado.

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\ker(T)$ tal que $x_n \to x$. Se tiene que $Tx_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto $Tx_n \to 0$ y con esto se tiene que

$$(x_n, Tx_n) \to (x, 0).$$

Además $(x_n, Tx_n) \in \mathrm{graf}(T)$, para todo $n \in \mathbb{N}$; es decir, $\big(x_n, Tx_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathrm{graf}(T)$ que converge a $(x, 0)$. Dado que T es cerrado, $\mathrm{graf}(T)$ es cerrado y por lo tanto $(x, 0) \in \mathrm{graf}(T)$; de donde $x \in \ker(T)$.

Finalmente, $\ker(T)$ es cerrado. $\square$

NOTACIÓN

Símbolo	Descripción
A^c	Complemento del conjunto A.
$A \setminus B$	Diferencia entre el conjunto A y el conjunto B.
$E^\times$	Conjunto de operadores lineales de E en sí mismo. Dual algebraico.
E^*	Espacio de todos los operadores lineales y continuos de E en sí mismo. Dual topológico.
$\mathcal{L}(E, F)$	Espacio de todos los operadores lineales y continuos de E en F.
$E_{\mathbb{R}}$	Proyección del espacio vectorial complejo, E, visto como un espacio vectorial real.
$\operatorname{int}(X)$	Interior del espacio topológico X.
$\overline{X}$	Clausura del espacio topológico X.
$B(x, r)$	Bola de centro x y radio r.
$B(r)$	Bola de centro 0 y radio r.
$\operatorname{span}(M)$	Conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de M.
$\operatorname{dom}(f)$	Dominio de la función f.
$\operatorname{img}(f)$	Imagen de la función f.
$\operatorname{graf}(T)$	Grafo de la aplicación lineal T.
$[\![m, n]\!]$	Intervalo de números enteros entre m y n.
$[a, b]$	Segmento cerrado entre a y b.
$]a, b[$	Segmento abierto entre a y b.
$\langle x, y\rangle$	Producto interno entre x y y.
$\|x\|$	Norma del vector x.
$x \perp y$	x es ortogonal a y.
$M^\perp$	Complemento ortogonal de M.
T^*	Operador adjunto de A en un espacio de Hilbert.
$T^\times$	Operador adjunto de A en un espacio de Banach.
T^n	Composición del operador T consigo mismo n veces.
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$	Sucesión de elementos en el espacio métrico X.
$x_n \to x$	La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x cuando n tiende a $+\infty$.

Símbolo	**Descripción**
$\lim x_n = x$	El límite de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cuando n tiende a $+\infty$, es x.
Tx	Imagen de x bajo el operador lineal T.
$\mathcal{C}(\Omega)$	Espacio de funciones continuas definidas sobre el conjunto Ω.
$\mathcal{C}^1(\Omega)$	Espacio de funciones con una derivada continua definidas sobre $\Omega \subseteq \mathbb{R}$.
$\mathscr{L}^p[a,b]$	Completación del espacio $\mathcal{C}[a,b]$ con la norma $\|u\| = \left(\int_a^b u(x)^p\,dx\right)^{1/p}$, para $1 \leq p < +\infty$.
$\ell^p(\mathbb{K})$	Espacio de sucesiones de elementos en $\mathbb{K}$ con la norma $\|u\| = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_i^p\right)^{1/p}$, para $1 \leq p < +\infty$.

Bibliografía

[1] H. Brézis. *Análisis funcional*. Alianza Editorial S.A., 1984.

[2] H. Brézis. *Functional analysis, Sobolev spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2010.

[3] G. Chirstol, A. Cot, y C. Marle. *Calcul différentiel*. Mathématiques pour le 2^{E} cycle. ellipses, 1997.

[4] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley, 1978.

[5] L. Todjuhounde. *Calcul différentiel: cours et exercise corrgés*. Cépaduès–éditions, 2004.

Índice alfabético

Aplicación abierta, 19

$\mathscr{C}(E, F)$: espacio de los operadores cerrados, 25
Conjunto de primera categoría, 14
Conjunto de segunda categoría, 14
Conjunto denso en ninguna parte, 14
Convergencia
  Débil, 30
  Fuerte, 30
  Operadores
    Débil, 32
    Débil-$*$, 34
    Fuerte, 31
    Uniforme, 31

Espacio
  reflexivo, 29

Función positiva-homogénea, 6
Función subaditiva, 6
Función sublineal, 6

Grafo, 24

Hiperplano
  Cerrado, 34
  Hiperplano afín, 34
  Separación en sentido amplio, 36
  Separación en sentido estrico, 36

Lema: Funcional de Minkowski de un convexo, 36
Lema de Zorn, 4

Operador cerrado, 24
Orden
  Cadena, 4
  Comparables, 4
  Cota superior, 4
  Maximal, 4
  Parcial, 3
  Total, 4

Teorema: Acotación uniforme, 16
Teorema: Aplicación abierta, 22
Teorema: Grafo cerrado, 26
Teorema de Hahn-Banach
  Espacios normados, 11
  Extensión de funcionales, 6
  Generalizado, 9
  Primera forma geométrica, 39
  Segunda forma geométrica, 39
  Vector no nulo, 13
Teorema de la categoría de Baire, 14
Transpuesta de una aplicación lineal
  Operador adjunto, 27

Análisis Matemático II

El presente fascículo recolecta las principales definiciones, proposiciones y teoremas, sobre los Teoremas Clásicos del Análisis, vistos en el curso de "Análisis Matemático II", dictado en la carrera de Matemática de la Escuela Politécnica Nacional. Además, presenta un compendio de ejercicios propuestos y resueltos referente a este tema. Este trabajo se lo realizó en base a los apuntes de clase de la asignatura por el profesor Mat. Andrés Merino en la carrera de Matemática de la Escuela Politécnica Nacional, y recopilado por el estudiante Andrés Miniguano.
Cualquier corrección, propuesta de cambio o mejora del presente trabajo se la puede realizar al correo: `mat.andresmerino@gmail.com`.

Proyecto CLAVEMAT

ISBN 978-0000-111-22-7

9 780000 111227 >