Semestre 2019-A — William Granda – Alexander Constante

Estos ejercicios se basan en las clases de la materia "Análisis Matemático I", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2018-B por el profesor German Rojas. Los ejercicios fueron elaborados por William Granda y Alexander Constante, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

EJERCICIO 1. Sean (E, d_E), (F, d_F) dos espacios métricos y $f\colon E \to F$ una función. Si d_E es la métrica discreta, entonces f es continua.

Demostración. Sea d_E la métrica discreta, la cual, para todo $x, y \in E$, viene dada por:

$$d_E(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \neq y, \\ 0 & \text{si} \quad x = y. \end{cases}$$

Sea $x \in E$, vamos a demostrar que f es continua en x, para esto, por la caracterización de continuidad, debemos probar que para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a x en E se tiene que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$ en F. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E, tal que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x,$$

debemos probar que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$, sea $\varepsilon > 0$, por la definición de límite, sabemos existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_E(x_n, x) < \frac{1}{2},$$

para todo $n \geq N$. Ahora, puesto que d_E es la métrica discreta tenemos que

$$0 = d_E(x_n, x) < \frac{1}{2},$$

para todo $n \geq N$, de donde,

$$x_n = x,$$

para todo $n \geq N$, así,

$$f(x_n) = f(x),$$

para todo $n \geq N$. Puesto que d_F es una métrica, se sigue que

$$d_F(f(x_n), f(x)) = 0 < \varepsilon,$$

para todo $n \geq N$, es decir,

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x),$$

con esto, hemos probado que f es continua. $\square$