Club de Matemática EPN

Análisis en Espacios Métricos • Ejercicios 11

Conceptos Topológicos

Semestre 2019-A Cristian Guachamín – Roque Miño – Luis Pozo

Estos ejercicios se basan en las clases de la materia ”Análisis Matemático I”, dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2015-B por el profesor Andrés Merino. Los ejercicios fueron elaborados por Cristian Guachamín, Roque Miño y Luis Pozo, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

Ejercicio 1. Sean (E, τ) un espacio topológico y $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de E.

a) Demostrar que $\bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$.

b) Demostrar que, si I es finito, entonces $\bigcup_{i\in I} \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$.

c) Demostrar que $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subseteq \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$.

Demostración.

a) Notemos que $A_j \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$, para todo $j \in I$. Como $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$ es cerrado, se tiene que $\overline{A_j} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$, para todo $j \in I$. Por lo tanto

$$\bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}.$$

b) Gracias al literal anterior, ya tenemos una inclusión, por lo cual, resta probar que $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \subseteq \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$. Se tiene que $A_i \subseteq \overline{A_i}$, para todo $i \in I$, de donde,

$$\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}.$$

Dado que I es finito, concluimos que $\bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$ es un cerrado. Entonces, por definición de clausura, tenemos que

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \subseteq \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}.$$

c) Tenemos que $A_i \subseteq \overline{A_i}$, para todo $i \in I$, por lo tanto

$$\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}.$$

Ahora, como la intersección de una familia arbitraria de conjuntos cerrados, es un cerrado, entonces $\bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$ es un conjunto cerrado. Luego, por definición de clausura, colegimos que

$$\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subseteq \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}.$$ □

EJERCICIO 2. Bajo el enunciado del ejercicio anterior:

1) Dar un ejemplo en que la igualdad en *a)* no se cumple.

2) Dar un ejemplo en el que la igualdad en *c)* no se cumple, incluso si I es finito.

Demostración.

1) Tomemos, para $n \in I = \mathbb{N}^*$, los conjuntos $A_n = \left(\frac{1}{n}, 2\right)$. Así,

$$\overline{A_n} = \left[\frac{1}{n}, 2\right] \qquad \text{y} \qquad \bigcup_{n\in I} \overline{A_n} = (0, 2],$$

por lo tanto

$$\bigcup_{n\in I} A_n = (0, 2) \qquad \text{y} \qquad \overline{\bigcup_{n\in I} A_n} = [0, 2]$$

Así, se tiene que la igualdad no siempre se verifica.

2) Tomemos, ahora, los conjuntos

$$A_1 = (0, 1) \qquad \text{y} \qquad A_2 = (1, 2).$$

Tenemos que $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, por lo tanto

$$\overline{A_1 \cap A_2} = \varnothing$$

Por otro lado, se tiene que

$$\overline{A_1} = [0, 1] \qquad \text{y} \qquad \overline{A_2} = [1, 2],$$

entonces $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} = \{1\}$, de donde se sigue que la igualdad no se verifica. □