



Estos ejercicios se basan en las clases de la materia "Análisis Matemático I", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2018-B por el profesor German Rojas. Los ejercicios fueron elaborados por William Granda y Alexander Constante, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

**EJERCICIO 1.** Sea  $(E, d)$  un espacio métrico. Pruebe que si  $T: E \rightarrow E$  es una contracción definida en  $(E, d)$  entonces  $T$  es continua.

*Demostración.* Supongamos que  $T$  es una contracción, así existe  $\alpha \in ]0, 1[$  tal que para todo  $x, y \in E$  se tiene que:

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y).$$

Vamos a probar que  $T$  es continua. Sean  $a \in E$  y  $\varepsilon > 0$ , debemos hallar  $\delta > 0$  tal que para todo  $x \in E$

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(T(x), T(a)) < \varepsilon.$$

Tomemos

$$\delta := \frac{\varepsilon}{\alpha} > 0,$$

de donde

$$d(x, a) < \delta = \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

implica que

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y) < \alpha \cdot \frac{\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon.$$

Con esto, hemos probado que  $T$  es continua. □