1. Se tiene una imagen con escala VGA (4 : 3), si se desea que al imprimirla tenga 10 cm de ancho, ¿cuáles deben ser sus dimensiones?

Solución.

Variables: Tomamos

- h: alto de la foto impresa, en cm.

Planteamiento: Para que se mantengan las proporciones, se debe cumplir que:

$$\frac{10}{h} = \frac{4}{3}$$

Resolución: Despejamos h y obtenemos

$$h = \frac{3}{4}10 = \frac{15}{2} = 7{,}5.$$

Respuesta: Las dimensiones deben ser $7{,}5 \times 10$ cm. □

2. Se tiene un foto de 16×10 cm. Si queremos ampliar en un 25 % su área sin alterar sus proporciones, ¿cuáles deben ser sus nuevas medidas?

Solución.

Variables: Tomamos

- b: ancho de la foto ampliada, en cm.
- h: alto de la foto ampliada, en cm.

Planteamiento: El área de la foto original es de 160 cm^2, por lo tanto, para que el área se amplíe 25 % se necesita que

$$b \cdot h = 160 + 160\frac{25}{100} = 200. \tag{1}$$

Por otro lado, para que se preserven las proporciones se necesita que

$$\frac{b}{h} = \frac{16}{10} \tag{2}$$

Resolución: Despejamos b en la ecuación (2) y tenemos

$$b = \frac{16}{10}h, \tag{3}$$

reemplazamos en (1), tenemos que

$$\left(\frac{16}{10}h\right) \cdot h = 200.$$

Resolviendo esta ecuación, tenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{16}{10}h\right) \cdot h = 200 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{16}{10}h^2 = 200 \\ &\Longleftrightarrow \quad h^2 = \frac{10}{16} \cdot 200 \\ &\Longleftrightarrow \quad h = \sqrt{125} \approx 11{,}18. \end{aligned}$$

Reemplazamos en (3) para obtener el valor de b:

$$b = \frac{16}{10}\left(\sqrt{125}\right) \approx 17{,}89.$$

Respuesta: Las nuevas medidas de la foto deben ser $17{,}89 \times 11{,}18$ cm, aproximadamente. □

3. Se han generado 2 animaciones, la primera de ellas con 1500 cuadros y la segunda con 1000 cuadros. Si se desea que la primera animación se reproduzca al doble de velocidad de la segunda y que juntas tengan una duración de medio minuto, ¿a qué velocidad se debe renderizar cada animación?

Solución.

Variables: Tomamos

- v_1: velocidad de la primera animación, en cuadros por segundo.
- v_2: velocidad de la segunda animación, en cuadros por segundo.

Planteamiento: Para que la primera animación se reproduzca al doble de velocidad de la segunda se necesita que

$$v_1 = 2v_2. \tag{4}$$

Por otro lado, para que las animaciones duren medio minuto, se necesita que

$$\frac{1500}{v_1} + \frac{1000}{v_2} = 30 \tag{5}$$

Resolución: Reemplazamos (5) en (4), tenemos que

$$\frac{1500}{2v_2} + \frac{1000}{v_2} = 30.$$

Resolviendo esta ecuación, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1500}{2v_2} + \frac{1000}{v_2} = 30 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1500 + 2000}{2v_2} = 30 \\ &\Longleftrightarrow \quad v_2 = \frac{3500}{60} \approx 58{,}33 \end{aligned}$$

Reemplazamos en (4) para obtener el valor de v_1:

$$v_1 = 2\left(\frac{3500}{60}\right) \approx 116{,}67.$$

Respuesta: La primera animación se debe renderizar a 58 cuadros por segundo y la segunda a 116 cuadros por segundo, aproximadamente. □

4. Resolver las siguientes inecuaciones:

 a) $7(3-2x) \geq -14$

 b) $\frac{x}{3-x} - 2 \leq 0$

Solución.

a) Notemos que

$$\begin{aligned} 7(3-2x) \geq -14 &\iff 3-2x \geq -2 \\ &\iff -2x \geq -5 \\ &\iff x \leq \frac{5}{2}, \end{aligned}$$

por lo tanto, la respuesta es

$$S = \left]-\infty, \frac{5}{2}\right].$$

b) Notemos que

$$\frac{x}{3-x} - 2 \leq 0 \iff \frac{3x-6}{3-x} \leq 0,$$

con esto, realizamos la tabla de factores:

	$]-\infty,2[$	2	$]2,3[$	3	$]3,+\infty[$
$3x-6$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$3-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$

Como buscamos los menores o iguales que 0, tenemos que la respuesta es

$$S =]-\infty, 2] \cup]3, +\infty[.$$ □

5. Se tiene una imagen con escala VGA (4 : 3), modelar el área que tendrá al imprimirla en función de su altura. ¿Qué altura debe tener para que su área sea mayor que 30 cm^2?

Solución. Para el modelamiento, consideremos lo siguiente:

Variables:

- h: altura de la impresión, en cm.
- b: base de la foto, en cm.
- $A(h)$: área de la foto, en función de la altura, en cm^2.

Planteamiento: Tenemos que la función del área es:

$$\begin{aligned} A :]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longmapsto bh. \end{aligned}$$

Ahora, para que se mantenga la proporción es necesario que

$$\frac{b}{h} = \frac{4}{3},$$

de donde

$$b = \frac{4}{3}h,$$

con esto, la función de A nos queda

$$\begin{aligned} A :]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longmapsto \frac{4}{3}h^2. \end{aligned}$$

Ahora, para responder la pregunta, es necesario que

$$A(h) > 30,$$

notemos que

$$\begin{aligned} A(h) > 30 &\iff \frac{4}{3}h^2 > 30 \\ &\iff h^2 - \frac{90}{4} > 0 \\ &\iff \left(h - \sqrt{\tfrac{90}{4}}\right)\left(h + \sqrt{\tfrac{90}{4}}\right) > 0, \end{aligned}$$

con esto, realizamos la tabla de factores:

	$\left]-\infty, -\sqrt{\frac{90}{4}}\right[$	$-\sqrt{\frac{90}{4}}$	$\left]-\sqrt{\frac{90}{4}}, \sqrt{\frac{90}{4}}\right[$	$\sqrt{\frac{90}{4}}$	$\left]\sqrt{\frac{90}{4}}, +\infty\right[$
$h - \sqrt{\frac{90}{4}}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$h + \sqrt{\frac{90}{4}}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
	$+$	0	$-$	0	$+$

Como buscamos los menores que 0, tenemos que la respuesta es

$$S = \left]-\infty, -\sqrt{\tfrac{90}{4}}\right[\cup \left]\sqrt{\tfrac{90}{4}}, +\infty\right[,$$

además, como los valores de h solo pueden ser positivos, la solución es

$$\left]\sqrt{\tfrac{90}{4}}, +\infty\right[,$$

es decir, la altura debe ser mayor que $\sqrt{\frac{90}{4}} \approx 4{,}74$ cm. □

6. Considere la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{2\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{2-x}. \end{aligned}$$

En $x = 1$, ¿la función crece o decrece?

Solución. Para responder la pregunta, primero calculemos la variación promedio de la función entre x y $x + h$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\frac{1}{2-(x+h)} - \frac{1}{2-x}}{h} \\ &= \frac{\frac{2-x-(2-x-h)}{(2-x-h)(2-x)}}{h} \\ &= \frac{\frac{h}{(2-x-h)(2-x)}}{h} \end{aligned}$$

$$= \frac{h}{(2-x-h)(2-x)h}$$
$$= \frac{1}{(2-x-h)(2-x)}.$$

Ahora, calculemos la variación instantánea de la función tomando $h = 0$:

$$\frac{1}{(2-x-0)(2-x)} = \frac{1}{(2-x)^2}.$$

Finalmente, evaluemos en $x = 1$ y tenemos que la variación instantánea de la función es ese punto es

$$\frac{1}{(2-1)^2} = 1.$$

Como este número es positivo, tenemos que la función crece. □

7. Considere la función

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t^2, 2-t). \end{aligned}$$

Determine el valor de $g(0)$, $g(1)$, $g(-1)$, $g(x+h)$, donde $x, h \in \mathbb{R}$.

Solución. Tenemos que

$$g(0) = (0,2), \qquad g(1) = (1,1), \qquad g(-1) = (1,3), \qquad \text{y} \qquad g(x+h) = ((x+h)^2,\ 2-(x+h)).$$ □

8. Se quiere construir una caja sin tapa de base cuadrada que tenga 1000 cm^3 de capacidad de tal forma que el material necesario para su construcción sea mínimo. Para esto, siga el siguiente procedimiento>

   a) Modele el área lateral de la caja en función de la longitud de su base.
   b) Si la base de la caja mide 5 centímetros, ¿cuál es el área de la caja?
   c) Si en lugar de 5 centímetros, aumentamos "un poco" el corte, ¿el área de la caja aumenta o disminuye? (Para esto, determinar si la función del área crece o decrece cuando la longitud de su base es 5 centímetros).
   d) Utilizar un asistente matemático para determinar la longitud de la base que genera la caja con menor área lateral. ¿Cuánto vale esta área?

Solución.

a) Para el modelamiento, consideremos lo siguiente:

Variables:

- h: altura de la caja, en cm.
- x: longitud del lado de la base de la caja, en cm.
- $A(x)$: área lateral de la caja, en función de la longitud del lado de la base, en cm^2.

Planteamiento: Tenemos que la función del área es:

$$\begin{aligned} A :]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 + 4xh. \end{aligned}$$

Ahora, para que la caja tenga 1000 cm^3 es necesario que

$$x^2 h = 1000,$$

de donde

$$h = \frac{1000}{x^2},$$

con esto, la función A nos queda

$$\begin{aligned} A :]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 + 4x\left(\frac{1000}{x^2}\right) = x^2 + \frac{4000}{x}. \end{aligned}$$

b) Evaluemos la función A en 5,

$$A(5) = 5^2 + \frac{4000}{5} = 825.$$

Por lo tanto, el área de la caja cuando el lado de la base mide 5 cm es de 825 cm^2.

c) Para responder la pregunta, primero calculemos la variación promedio de la función entre x y $x + h$:

$$\begin{aligned} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2 + \frac{4000}{x+h} - \left(x^2 + \frac{4000}{x}\right)}{h} \\ &= \frac{\frac{h(h^2x+3hx^2+2x^3-4000)}{(h+x)x}}{h} \\ &= \frac{h^2x + 3hx^2 + 2x^3 - 4000}{(h+x)x}. \end{aligned}$$

Ahora, calculemos la variación instantánea de la función tomando $h = 0$:

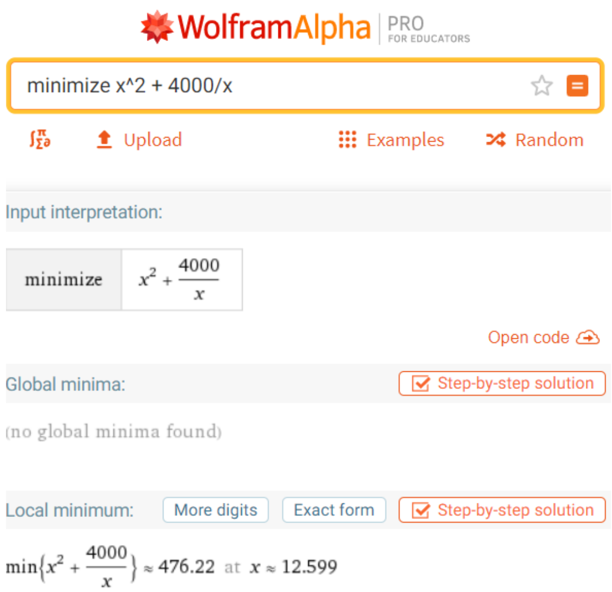
$$\frac{0^2x + 30x^2 + 2x^3 - 4000}{(0+x)x} = \frac{2x^3 - 4000}{x^2}.$$

Finalmente, evaluemos en $x = 5$ y tenemos que la variación instantánea de la función es ese punto es

$$\frac{2(5)^3 - 4000}{5^2} = -150.$$

Como este número es negativo, tenemos que la función decrece, por lo tanto, el área de la caja disminuye.

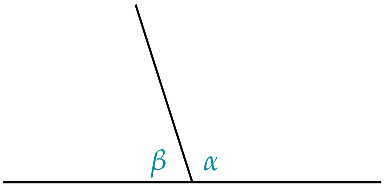
d) Para esto, colocamos `minimize x^2 + 4000/x` en Wolfram | Alpha, con lo cual obtenemos



Por lo tanto, la longitud del lado de la base debe ser 12,6 cm, aproximadamente, para obtener la menor área lateral; además, el área lateral es de 476,22 cm^2, aproximadamente. □

Semestre 2019-2 Andrés Merino

1. Dado un segmento AB, sobre este, construir un ángulo de 45 grados. Explicar cada paso de la construcción.
2. Basado en la construcción de un hexágono regular, construir una estrella de 6 puntas.
3. Dibujar un triángulo cualquiera y encontrar su baricentro explicando cada paso.
4. En la figura, si el ángulo α y el ángulo β están en proporción de $3:2$, encontrar sus medidas.



Solución.

Variables: Tomamos

- α: medida del ángulo descrito en la figura.
- β: medida del ángulo descrito en la figura.

Planteamiento: Para que los ángulos estén en proporción de $3:2$ es necesario que

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{2},$$

Por otro lado, dado que los ángulos forman un ángulo de $180°$, se necesita que

$$\alpha + \beta = 180°. \tag{1}$$

Resolución: Despejando de la primera ecuación, tenemos que

$$\alpha = \frac{3\beta}{2}.$$

Reemplazando en la ecuación (1), tenemos que

$$\frac{3\beta}{2} + \beta = 180°,$$

de donde se tiene que

$$\frac{5\beta}{2} = 180°,$$

y por lo tanto

$$\beta = 72°.$$

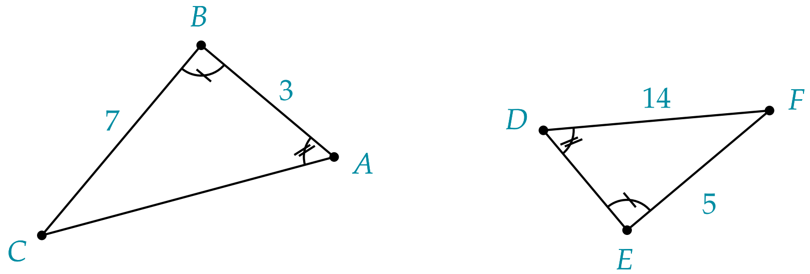
Finalmente, reemplazando el valor de β en (1), se tiene que

$$\alpha = 108°.$$

□

Respuesta: La medida del ángulo α es $108°$ y la del ángulo β es de $72°$.

5. Los triángulos de la figura son semejantes, encontrar las medidas restantes.



Solución. Definamos

- x: Medida faltante en el primer triángulo
- y: Medida faltante en el segundo triángulo.

Gracias a que los triángulos son semejantes, se tiene que

$$\frac{7}{5} = \frac{3}{y} = \frac{x}{14},$$

por lo tanto, se tienen las siguientes igualdades:

$$\frac{3}{y} = \frac{7}{5} \qquad \text{y} \qquad \frac{x}{14} = \frac{7}{5},$$

de las cuales se sigue que

$$y = \frac{15}{7} \approx 2,14 \qquad \text{y} \qquad x = \frac{98}{5} = 19,6.$$

Así, las medidas faltantes en el primer y segundo triángulo son de 19,6 y 2,14, respectivamente. □

6. Si, en un triángulo rectángulo, su hipotenusa mide 13 unidades y uno de sus catetos mide 5 unidades, encontrar la medida del otro cateto y de sus ángulos.

Solución.

Variables: Tomemos

- x: Medida del cateto restante α: medida del ángulo opuesto al lado x.

Planteamiento: Utilizando el Teorema de Pitágoras, tenemos que

$$13^2 = 5^2 + x^2,$$

por otro lado, por la definición de la razón seno, tenemos que

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{x}{13}.$$

Resolución: Despejando de la primera ecuación, tenemos que

$$x = 12.$$

Por otra parte, de la segunda ecuación, tenemos que

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{12}{13}$$

de donde, se sigue que

$$\alpha \approx 67,38^\circ.$$

Respuesta: La medida del lado faltante es de 12 unidades, mientras que la del ángulo opuesto al mismo es de $67,38^\circ$. Finalmente, el ángulo restante se obtiene sabiendo que junto con α debe sumar 90°, es decir, su valor es de $90^\circ - 67,38^\circ = 22,62^\circ$. □

7. Si al juntar dos escaleras de 10 m y 12 m se desea alcanzar una altura de 8 m, ¿a qué distancia deben colocarse sus bases?

Solución. Definimos

- x: la distancia entre la base de la escalera de 10 m a la base de la altura, en metros.
- y: la distancia entre la base de la escalera de 12 m a la base de la altura, en metros.

En los triángulos rectángulos obtenidos, aplicamos el teorema de Pitágoras, obtenemos que

$$x^2 + 8^2 = 10^2 \qquad \text{y} \qquad y^2 + 8^2 = 12^2.$$

Resolviendo, tenemos que

$$x = \sqrt{36} = 6 \qquad \text{y} \qquad y = \sqrt{80} \approx 8{,}94$$

Por lo tanto las bases de las escaleras deberán tener una separación de 14,94 m. □

8. Si al juntar dos escaleras de 10 m y 12 m se coloca sus bases a 4 m, ¿qué altura se alcanza?

Solución. Definimos

- x: la distancia entre la base de la escalera de 10 m a la base de la altura, en metros.
- h: la altura que que alcanzan las escaleras, en metros.

En los triángulos rectángulos obtenidos, aplicamos el teorema de Pitágoras, obtenemos que

$$x^2 + h^2 = 10^2 \qquad \text{y} \qquad (4 - x)^2 + h^2 = 12^2.$$

Resolviendo, tenemos que

$$x = -\frac{7}{2},$$

lo cual no tiene sentido en nuestro problema, por lo tanto, no podemos ubicar las escaleras de manera indicada. □

9. Si en un momento del día, una persona de 1.80 m proyecta una sombre de 60 cm, ¿qué longitud tendrá la sombra de una persona de 1.60 m?

Solución. Definamos

- x: longitud de la sombra buscada en m.

Tenemos que

$$\begin{align} 1,80 : 1,60 &= 0,6 : x \tag{2} \\ \frac{1,8}{1,6} &= \frac{0,6}{x}, \tag{3} \end{align}$$

de donde se sigue que

$$x = \frac{0,96}{1,8} \approx 0,53.$$

Entonces, la sombra proyectada por la persona de 1.60 m es de 53 cm. □

1. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(12, -3)$ y $(-1, -12)$.

Solución. Utilizando la fórmula para la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, se tiene que

$$y - (-3) = \frac{-12 - (-3)}{-1 - 12}(x - 12).$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta es

$$y = \frac{9}{13}x - \frac{147}{13}. \qquad \square$$

2. Dados los puntos

$$B = (2, -2) \qquad \text{y} \qquad C = (-3, 2),$$

determinar su mediatriz.

Solución. Primero, determinemos el punto medio entre B y C, llamémoslo F:

$$A = \frac{1}{2}(B + C) = \frac{1}{2}(-1, 0) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right).$$

Ahora, determinemos la ecuación de la recta que pasa por B y C, tenemos que es:

$$y - (-2) = \frac{2 - (-2)}{-3 - 2}(x - 2)$$

que equivale a

$$y = -\frac{4}{5}x - \frac{2}{5}.$$

Por lo tanto, le pendiente de esta recta es $m_1 = -\frac{4}{5}$.

Ahora, ya que la mediatriz es perpendicular, si m_2 es la pendiente de esta, es necesario que

$$m_1 m_2 = -1,$$

notemos que

$$m_1 m_2 = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{4}{5}m_2 = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad m_2 = \frac{5}{4}.$$

Por lo tanto, la mediatriz es la recta de pendiente $m_2 = \frac{5}{4}$ que pasa por el punto $D = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$, por lo tanto si ecuación es

$$y - 0 = \frac{5}{4}\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

que equivale a

$$y = \frac{5}{4}x + \frac{5}{8}. \qquad \square$$

3. Encuentre el foco de la parábola de ecuación

$$y^2 - 6y - 8x + 18 = 0.$$

Solución. Completando los cuadrados, tenemos que

$$(y - 3)^2 = 8x - 9$$

por lo tanto

$$(y-3)^2 = 8\left(x - \frac{9}{8}\right)$$

así, tenemos que

$$k = 3 \qquad h = \frac{9}{8} \qquad \text{y} \qquad p = 2.$$

Con esto, tenemos que el foco es

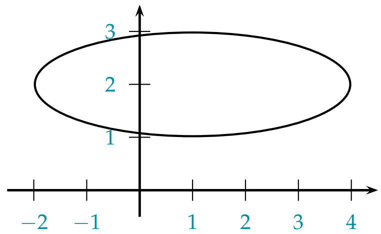
$$(h+p, k) = \left(\frac{9}{8} + 2, 3\right).$$

□

4. El lugar geométrico de ecuación

$$x^2 - 2x + 9y^2 - 36y + 28 = 0$$

se lo muestra en la siguiente gráfica:



Determinar la ecuación de la gráfica trasladada -2 unidades en el eje x y reflejada por el eje x, además, graficarla aproximadamente.

Solución. Para esto, debemos realizar la transformación

$$(x, y) \mapsto (x - (-2), -y)$$

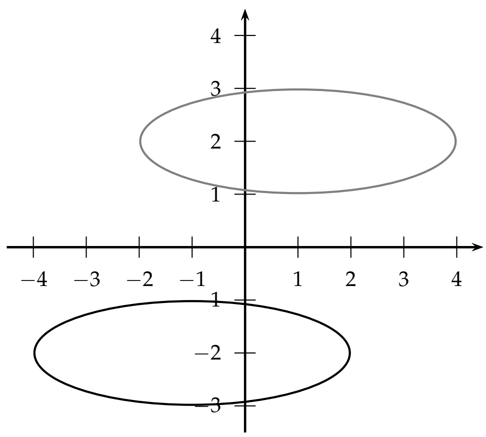
en la ecuación, así, obtenemos la nueva ecuación:

$$(x+2)^2 - 2(x+2) + 9(-y)^2 - 36(-y) + 28 = 0$$

que equivale a

$$x^2 + 2x + 9y^2 + 36y + 28 = 0$$

y su gráfica es



□

5. Determinar el centro y la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(-3,-3)$, $(0,1)$ y $(-3,1)$.

Solución. Consideremos la ecuación de la circunferencia

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

donde D, E, F son valores que vamos a determinar. Dado que la circunferencia pasa por los tres puntos, se tiene que

- Para el punto $(-3, -3)$, se debe cumplir que

  $$(-3)^2 + (-3)^2 + D(-3) + E(-3) + F = 0$$

  lo que equivale a

  $$-3D - 3E + F = -18 \tag{1}$$

- Para el punto $(0, 1)$, se debe cumplir que

  $$(0)^2 + (1)^2 + D(0) + E(1) + F = 0$$

  lo que equivale a

  $$E + F = -1 \tag{2}$$

- Para el punto $(-3, 1)$, se debe cumplir que

  $$(-3)^2 + (1)^2 + D(-3) + E(1) + F = 0$$

  lo que equivale a

  $$-3D + E + F = -10 \tag{3}$$

Así, resolvemos el sistema dado por (1), (2) y (3):

$$\begin{cases} -3D - 3E + F = -18, \\ \qquad\quad E + F = -1, \\ -3D + \; E + F = -10. \end{cases}$$

Con esto, tenemos que

$$D = 3, \qquad E = 2 \qquad \text{y} \qquad F = -3.$$

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia es

$$x^2 + y^2 + 3x + 2y - 3 = 0.$$

Completando los cuadrados, tenemos que la ecuación es

$$\left(x + \tfrac{3}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = \tfrac{25}{4},$$

de donde, el centro de la circunferencia es el punto

$$\left(-\tfrac{3}{2}, -1\right).$$

□

6. Escribir la matriz de rotación de 90° y de reflexión de 45°. Además, escriba la matriz que representa una reflexión de 45° seguida de una rotación de 90°.

Solución. La matriz de rotación de 90°es

$$\text{rot}(90^\circ) = \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & -\operatorname{sen}(90^\circ) \\ \operatorname{sen}(90^\circ) & \cos(90^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz de reflexión de 45°es

$$\text{ref}(45^\circ) = \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & \operatorname{sen}(90^\circ) \\ \operatorname{sen}(90^\circ) & -\cos(90^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz que representa una reflexión de 45° seguida de una rotación de 90°

$$\text{rot}(90^\circ)\text{ref}(45^\circ) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

7. Dado el triángulo de vértices $(1,2)$, $(-1,2)$ y $(0,-2)$, encontrar el triángulo reflejado por una recta de ángulo de inclinación 45° y luego rotado 90°.

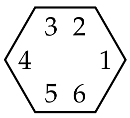
Solución. Apliquemos la transformación a cada vértice del triángulo:

- Para $(1,2)$:
$$\text{rot}(90^\circ)\text{ref}(45^\circ)(1,2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
- Para $(-1,2)$:
$$\text{rot}(90^\circ)\text{ref}(45^\circ)(-1,2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
- Para $(0,-2)$:
$$\text{rot}(90^\circ)\text{ref}(45^\circ)(0,-2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

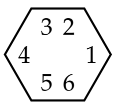
Con esto, los vértices del triángulo luego de una reflexión de 45°y una rotación de 90°son $(-1,2)$, $(1,2)$ y $(0,-2)$. $\square$

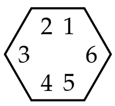
8. Encontrar el grupo de simetrías del hexágono.

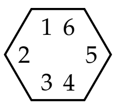
Solución. Tomemos el siguiente hexágono:

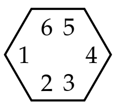


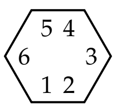
Sabemso que tiene 12 simestría, estas son:

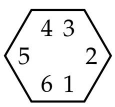
- rot(0°): 

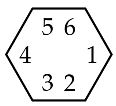
- rot(60°): 

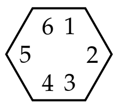
- rot(120°): 

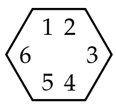
- rot(180°): 

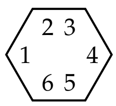
- rot(240°): 

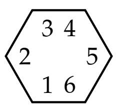
- rot(300°): 

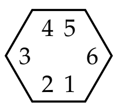
- ref(0°): 

- ref(30°): 

- ref(60°): 

- ref(90°): 

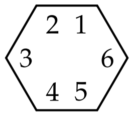
- ref(120°): 

- ref(150°): 

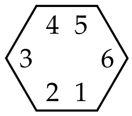
□

9. En base al ejercicio anterior, encontrar a qué es igual $\operatorname{ref}(0^\circ)\operatorname{rot}(60^\circ)$.

Solución. Si al hexágono del ejercicio anterior le aplicamos una rotación de 60°obtenemos



Luego, aplicamos una reflexión de 0°y obtenemos:



Con esto, comporando con el ejercicio anterior, obtenemos que

$$\operatorname{ref}(0^\circ)\operatorname{rot}(60^\circ) = \operatorname{ref}(150^\circ).$$ □

10. Explique la diferencia entre un gráfico vectorial y un mapa de bits.