Semestre 2019-A William Granda – Alexander Constante

Estos ejercicios se basan en las clases de la materia "Análisis Matemático I", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2018-B por el profesor German Rojas. Los ejercicios fueron elaborados por William Granda y Alexander Constante, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

EJERCICIO 1. Sean $E = \{x \in \mathcal{C}[a,b] : x' \in \mathcal{C}[a,b]\}$ con la norma $||x|| = ||x||_\infty + ||x'||_\infty$ par $x \in E$ y $c \in]a,b[$. Pruebe si los siguientes operadores son lineales y acotados:

a)

$$\begin{aligned} T_1\colon E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x'(c)\cdot x; \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} T_2\colon E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x'(c) + x. \end{aligned}$$

En caso de que el operador sea acotado, halle su norma.

Demostración.

a) Veamos que T_1 no es un operador lineal; sean $x, y \in \mathcal{C}[a,b]$, $\alpha \in \mathbb{K}$, y $t \in [a,b]$:

$$\begin{aligned} T_1(\alpha x + y)(t) &= (\alpha x + y)'(c)\cdot(\alpha x + y)(t) \\ &= (\alpha x'(c) + y'(c))(\alpha x(t) + y(t)) \\ &= \alpha^2 x'(c)x(t) + \alpha x'(c)y(t) + \alpha y'(c)x(t) + y'(c)y(t) \\ &\neq \alpha T_1 x(t) + T_1 y(t), \end{aligned}$$

por tanto, T_1 no es un operador lineal.

Por otro lado, comprobemos que T_1 no es un operador acotado; para esto, consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, la siguiente función

$$\begin{aligned} x_n\colon [0,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto t^n \end{aligned}$$

de donde, $x_n \in \mathcal{C}[0,2]$ y

$$\begin{aligned} x_n' \colon\ [0,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto nt^{n-1}. \end{aligned}$$

Así, para $t \in [a,b]$,

$$(T_1(x_n))(t) = x_n'(c) \cdot x_n(t) = nc^{n-1}t^n \qquad \text{y} \qquad (T_1(x_n))'(t) = n^2c^{n-1}t^{n-1}.$$

Ahora, tomando $c = 1 \in]0,2[$, obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{||T_1(x_n)||}{||x_n||} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{||nt^n||_\infty + ||n^2t^{n-1}||_\infty}{||t^n||_\infty + ||nt^{n-1}||_\infty} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{|n| \max\limits_{0\le t\le 1} |t^n| + |n^2| \max\limits_{0\le t\le 1} |t^{n-1}|}{\max\limits_{0\le t\le 1} |t^n| + |n| \max\limits_{0\le t\le 1} |t^{n-1}|} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+n^2}{1+n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n(1+n)}{1+n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} n = +\infty; \end{aligned}$$

por lo tanto, T_1 no es acotada.

b) Probemos la linealidad de T_2; sean $x, y \in \mathcal{C}[a,b]$, $\alpha \in \mathbb{K}$, y $t \in [a,b]$:

$$\begin{aligned} T_2(\alpha x + y)(t) &= (\alpha x + y)'(c) + (\alpha x + y)(t) \\ &= \alpha x'(c) + y'(c) + \alpha x(t) + y(t) \\ &= \alpha(x'(c) + x(t)) + (y'(c) + y(t)) \\ &= \alpha T_2 x(t) + T_2 y(t), \end{aligned}$$

entonces T_2 es un operador lineal.

Ahora, tenemos que

$$\begin{aligned} ||T_2(x)|| &= ||x'(c) + x|| \\ &= ||x'(c) + x||_\infty\ + ||0 + x'||_\infty \\ &\le ||x||_\infty + ||x'||_\infty + |x'(c)| \\ &= ||x||, \end{aligned}$$

a lo cual, $||T_2|| \le 1$.

En cambio, al considerar $u(t) = 1$ tenemos que

$$||T_2(u)|| = ||u'(c) + u|| = ||0 + 1|| = 1 \leq ||T_2||$$

y, puesto que $||u|| = ||u||_\infty + ||u'||_\infty = 1$, concluímos que $||T_2|| = 1$. $\square$